

MODELOWANIE BELEK TRÓJWARSTWOWYCH

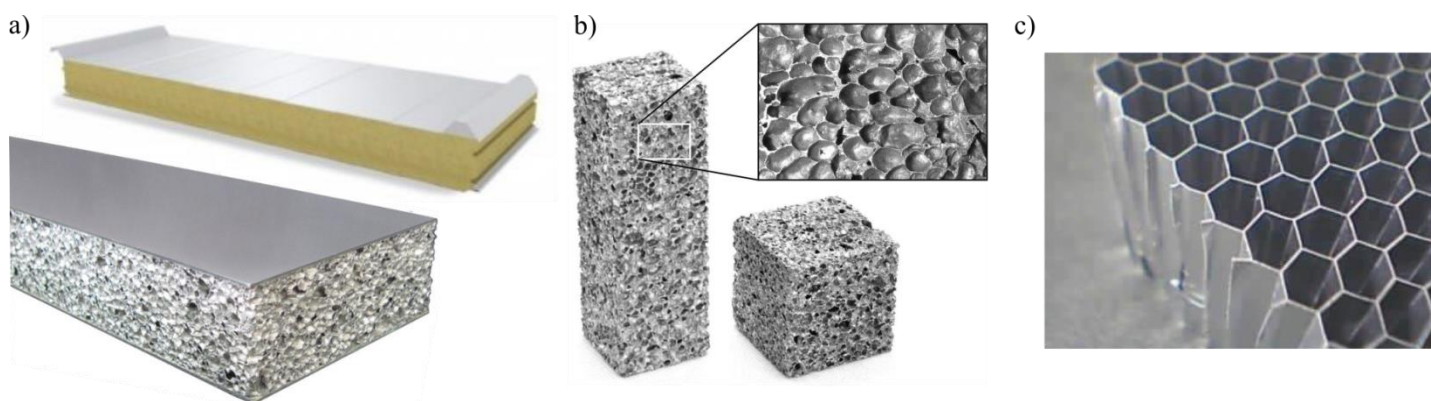
/2/

Część teoretyczna

1. Charakterystyka konstrukcji trójwarstwowych

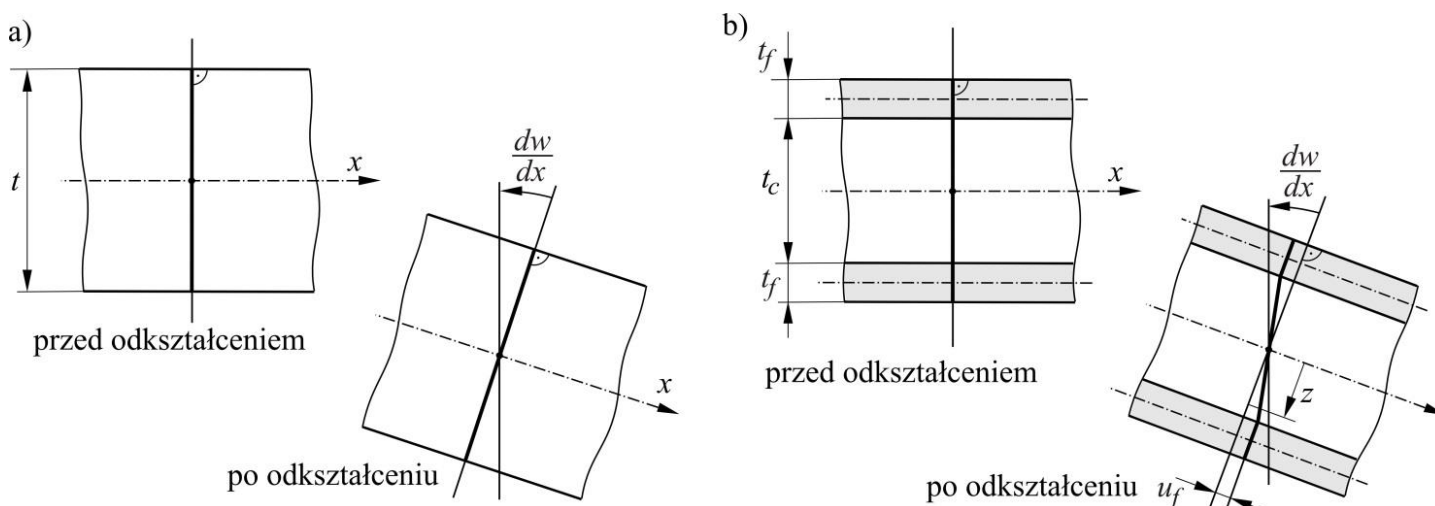
Jednym ze sposobów zwiększenia sztywności elementów poddawanych zginaniu jest zaprojektowanie ich jako konstrukcje trójwarstwowe. Konstrukcja taka składa się z dwóch okładzin o znacznej sztywności, które przenoszą obciążenie oraz z lekkiego rdzenia. Głównym zadaniem rdzenia jest utrzymywanie dystansu między okładzinami; jego udział w przenoszeniu obciążenia jest niewielki.

Okładziny wykonane są najczęściej z blach stalowych lub aluminiowych. Na rdzenie stosuje się tworzywa sztuczne (pianki poliuretanowe), cienkie, odpowiednio ukształtowane blachy (blacha falista, plaster miodu) lub piany metalowe (aluminiowe lub stalowe). Przykłady przedstawione są na Rys. 1.



Rys. 1 Przykłady konstrukcji trójwarstwowych (a); przykłady materiałów rdzeni (b)

Klasyczne podejście do modelowania belek zakłada, zgodnie z hipotezą Eulera-Bernouiego (E-B), że prosta prostopadła do osi belki przed odkształceniem pozostaje taką po odkształceniu (Rys. 2a). Jest to prawdą w przypadku belek jednorodnych o nieznacznej wysokości. W przypadku belek trójwarstwowych, w których własności mechaniczne okładzin i rdzenia jak również i grubości znaczenie się od siebie różnią, hipoteza E-B nie jest właściwa. W tym przypadku stosuje się hipotezę linii łamanej (Rys. 2b).



Rys. 2 Przykłady rdzeni konstrukcji trójwarstwowych

Model analityczny belki trójwarstwowej można opisać wykorzystując hipotezę linii łamanej oraz podejście energetyczne [1]. Po zdefiniowaniu pola przemieszczeń i zapisaniu energii całkowitej układu z zasady

stacjonarności energii, otrzymuje się układ równań równowagi. Rozwiązanie układu pozwala otrzymać wyrażenie na maksymalne ugięcie

$$w_{max} = \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\right)^2 \left[1 - 2 \frac{\tanh(C_b L)}{C_b L}\right] \frac{FL}{16G_c b t_c} + \frac{FL^3}{48\alpha_{11} b t_c^3} \quad (1)$$

gdzie F jest siłą skupioną przyłożoną w połowie odległości między podporami, L – odległością między podporami, t_c – grubością rdzenia, G_c – modułem sztywności rdzenia, a b szerokością belki.

Podobnie można wyznaczyć naprężenia w połowie długości belki

$$\sigma_x^f = \pm \left(\frac{1}{2} + \frac{t_f}{t_c}\right) \frac{E_f}{\alpha_{11}} \cdot \frac{FL}{4b t_c^2} \quad (2)$$

Naprężenia można również wyznaczyć przy użyciu przybliżonej teorii belek trójwarstwowych [2]. Zakładają, że przekrój poprzeczny jest symetryczny względem osi obojętnej, oba materiały zachowują się liniowo-sprężyste, a moduł Younga rdzenia jest dużo mniejszy od modułu okładzin, można przyjąć, że całe naprężenia normalne przenoszone są przez okładziny a moduł Younga rdzenia jest równy zero. Naprężenia normalne w okładzinach będą wtedy równe

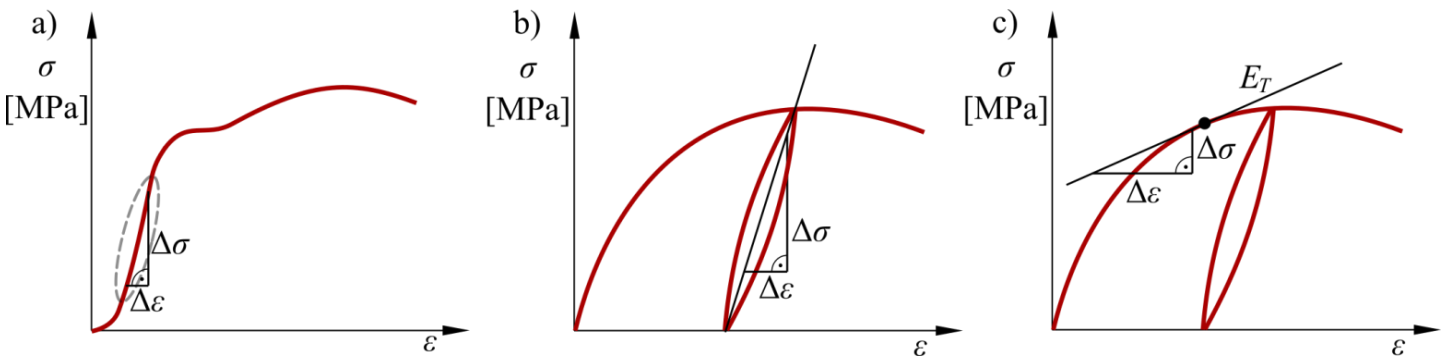
$$\sigma_x^f = \pm \frac{Mh}{2I_f} = \frac{FLh}{8I_f} \quad (3),$$

gdzie I_f jest momentem bezwładności obu okładzin względem osi obojętnej, h jest wysokością belki, a h_c grubością rdzenia.

2. Wyznaczanie modułu Younga materiału

Jednym z kluczowych parametrów opisujących własności mechaniczne materiału jest moduł sprężystości wzdłużnej, inaczej moduł Young'a, oznaczany literą E . Opisuje on sztywność materiału, co oznacza, że im większa jego wartość, tym większa sztywność materiału. Dla przykładu, moduł Younga dla stali wynosi 205000 MPa, a dla miedzi 120000 MPa. Jest to wielkość analogiczna do stałej sprężyny, opisującej jej sztywność.

Moduł Younga wyznacza się z krzywej rozciągania. Ponieważ jest to parametr opisujący sztywność, wyznacza się go w zakresie odkształceń sprężystych. W zależności od charakterystyki materiału, stosuje się różne podejścia do jego wyznaczenia, jak przedstawiono na Rys. 3.



Rys. 3 Wyznaczanie modułu Younga

Dla materiałów wykazujących zachowanie sprężyste w początkowej fazie rozciągania moduł Younga wyznacza się w obszarze odkształceń sprężystych, gdzie krzywa rozciągania jest w przybliżeniu prostą. Ponieważ w rzeczywistych warunkach na początku próby może nastąpić poślizg próbki w szczękach, a granica proporcjonalności jest trudna do określenia, odrzuca się początek wykresu oraz część w okolicy granicy proporcjonalności. Na pozostałym odcinku wprowadza się prostą regresji, z której wyznacza się moduł Younga (Rys. 3a).

Jeżeli materiał nie wykazuje zachowania sprężystego nawet na początku próby, moduł Younga wyznacza się wykonując w czasie trwania próby odciążanie i ponowne obciążanie otrzymując pętlę histerezy. Łącząc wierzchołki pętli otrzymuje się prostą, na podstawie której wyznacza się moduł Young'a (Rys. 3b).

Moduł Younga jest to zatem stosunek przyrostu naprężeń do przyrostu odkształceń

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$$

Moduł ten można również zdefiniować jako tangens kąta nachylenia prostej do osi poziomej $E = \tan\alpha$. Opis taki pozwala również na zdefiniowanie modułu stycznego E_T , który opisuje sztywność materiału w dowolnej chwili na krzywej rozciągania, jak to przedstawiono na Rys. 3c.

Literatura

1. Magnucki K., Szyc W. *Wytrzymałość i stateczność belek i płyt trójwarstwowych z rdzeniem z pianki aluminiowej*. WPP, Poznań, 2012.
2. Gere J.M., Goodno B.J., *Mechanics of materials*, Cengage Learning, Toronto, 2009.

Omówienie ćwiczenia

Przedmiot badań i cel ćwiczenia

Przedmiotem badań jest belka trójwarstwowa z rdzeniem z piany aluminiowej. Okładziny belki wykonane są z blachy aluminiowej. Belka poddawana jest trójpunktowemu zginaniu. Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z konstrukcjami trójwarstwowymi oraz z analitycznymi i numerycznymi sposobami ich modelowania.

Przebieg ćwiczenia

1. Na podstawie dostarczonej próbki przygotować rysunek zawierający wymiary próbki.
2. Przygotować schematyczny rysunek stanowiska badań. Przedstawić w uproszczeniu badaną belkę, oznaczyć podpory i ich rozstaw, punkt przyłożenia siły, położenie czujnika przemieszczenia. Opisać czujnik, maszynę wytrzymałościową i oprogramowanie do badań doświadczalnych i modelowania numerycznego.
3. Na podstawie załączonych wykresów, rozciągania blachy aluminiowej okładzin i ściskania pianki rdzenia, wyznaczyć moduły Young'a obu materiałów. W przypadku pianki wartość wyznaczyć jako średnią z trzech wartości dla różnych pętli histerezy. Wartości zapisać pod wykresami
4. Korzystając z arkusza kalkulacyjnego wyznaczyć maksymalne ugięcie i naprężenia w okładzinach dla modelu dokładnego. Narysować przekrój poprzeczny belki, zwymiarować i obliczyć moment bezwładności okładzin względem osi obojętnej. Na podstawie przybliżonego równania obliczyć naprężenia w okładzinach.

Zaproponować model MES belki, który będzie użyty do wyznaczenia ugięcia i naprężeń:

- wybrać typ analizy,
 - przygotować model materiału rdzenia i okładzin
 - zaproponować model geometryczny (3D; 2D; symetria),
 - wybrać element skończony dla rdzenia i okładziny,
 - zaproponować sposób obciążenia i podparcia belki
 - wybrać rodzaj kontaktu.
5. Przedstawić wyniki badań eksperymentalnych, numerycznych i analitycznych. Wartości ugięć maksymalnych zestawić w Tabeli 1.
 6. Przeprowadzić analizę wpływu wartości modułu Young'a rdzenia na ugięcie belki. Wyniki przedstawić na wykresie $w_{\max}(E_c)$ umieszczając na nim krzywą dla metody analitycznej lub numerycznej. Wartości modułu Young'a przyjąć zgodnie z Tabelą 2.
 7. Skomentować różnice w wynikach otrzymanych różnymi metodami. Omówić wpływ własności mechanicznych rdzenia na ugięcie belki.

<p align="center">MODELOWANIE WSPOMAGAJĄCE PROJEKTOWANIE MASZYN</p> <p align="center">LABORATORIUM</p>			
Osoby wykonujące ćwiczenie:		Tytuł ćwiczenia <p align="center">MODELOWANIE BELEK TRÓJWARSTWOWYCH</p>	
		2	
Wydział/kierunek/semestr/typ studiów	Grupa lab.	Data wykonania ćwiczenia	Podpis prowadzącego

- stop – czyste Al; 1,5% Ca; 1,5% Ti,
- średnia wielkość porów – 4-6 mm,
- średnia gęstość – 0,25 g/cm³,
- Moduł Younga – 700 MPa,
- wytrzymałość na rozciąganie – 1,6 MPa,
- wytrzymałość na ściskanie – 1,5 MPa.

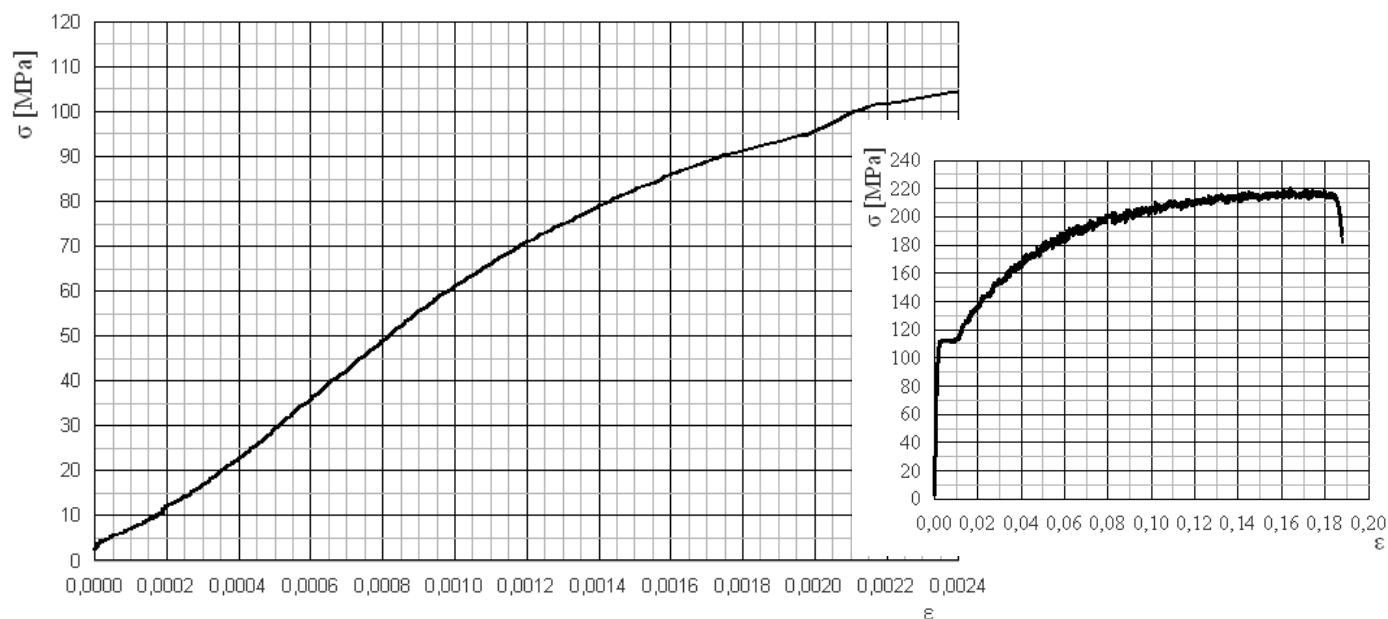


(Narysować schematycznie belkę, sposób podparcia i obciążenia oraz opisać aparaturę pomiarową)

3. Wyznaczanie własności mechanicznych materiałów belki

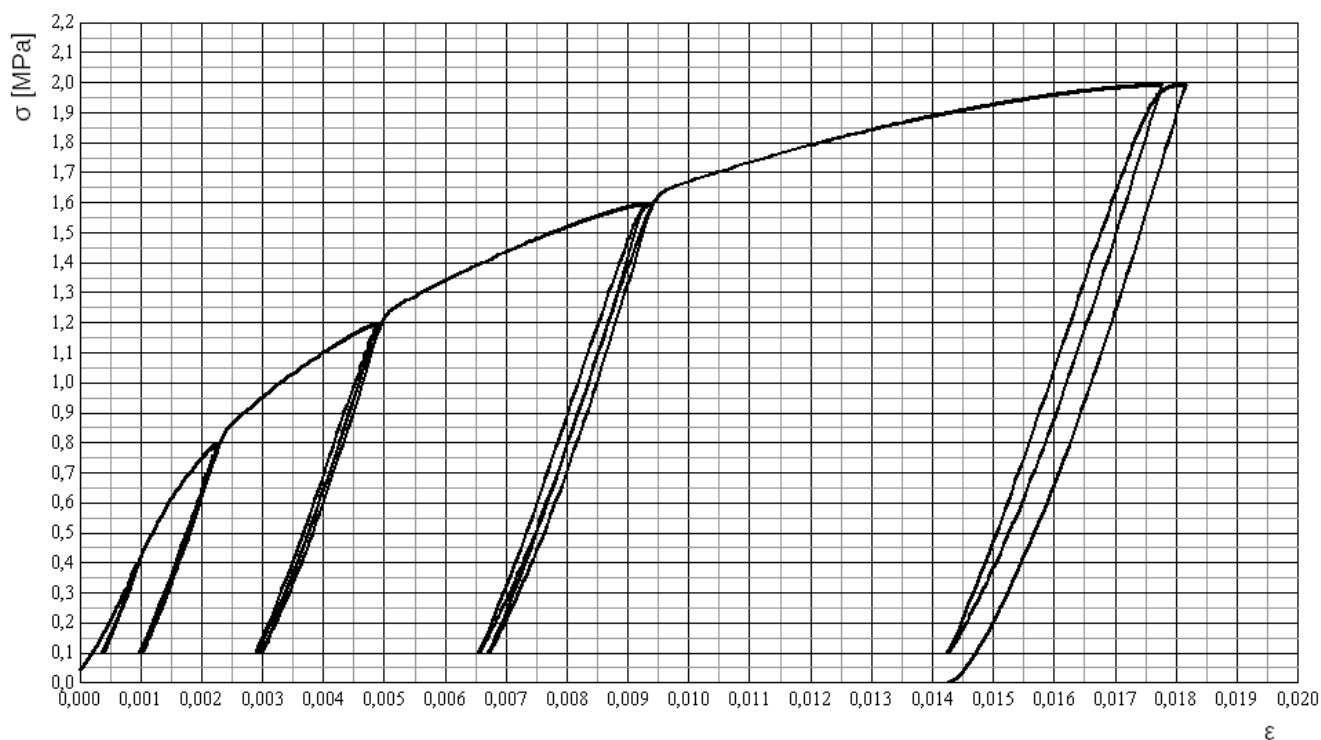
3.1 Okładziny belki

Poniżej przedstawiono wykres rozciągania próbki wyciętej z okładziny belki. Przeprowadzając przez początkową, liniową część wykresu prostą regresji, wyznaczyć moduł Younga: $E_f = \Delta\sigma/\Delta\varepsilon$.



3.2 Rdzeń belki

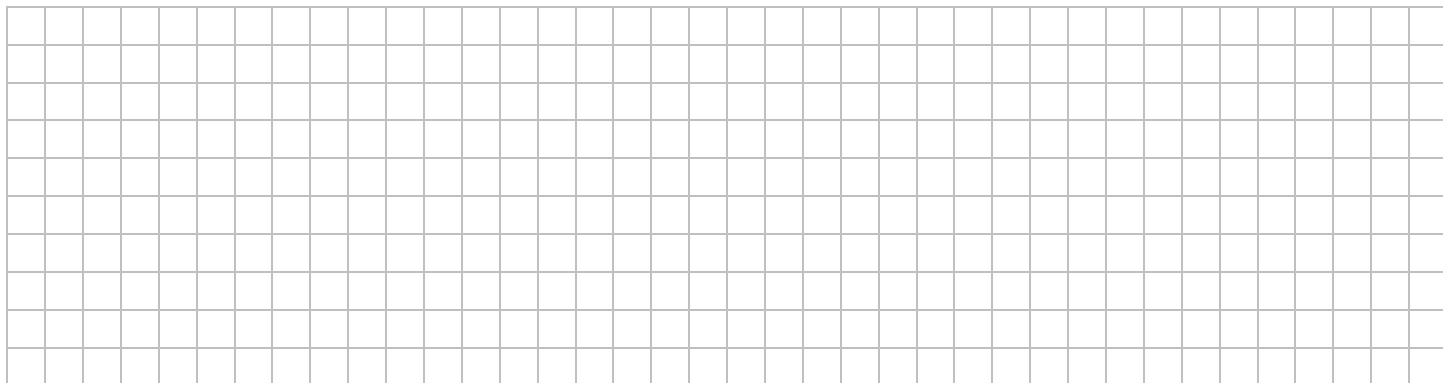
Poniżej przedstawiono wykres ściskania próbki piany aluminiowej. Przeprowadzając przez liniowe części wykresu proste regresji, wyznaczyć moduł Younga: $E_c = \Delta\sigma/\Delta\varepsilon$.



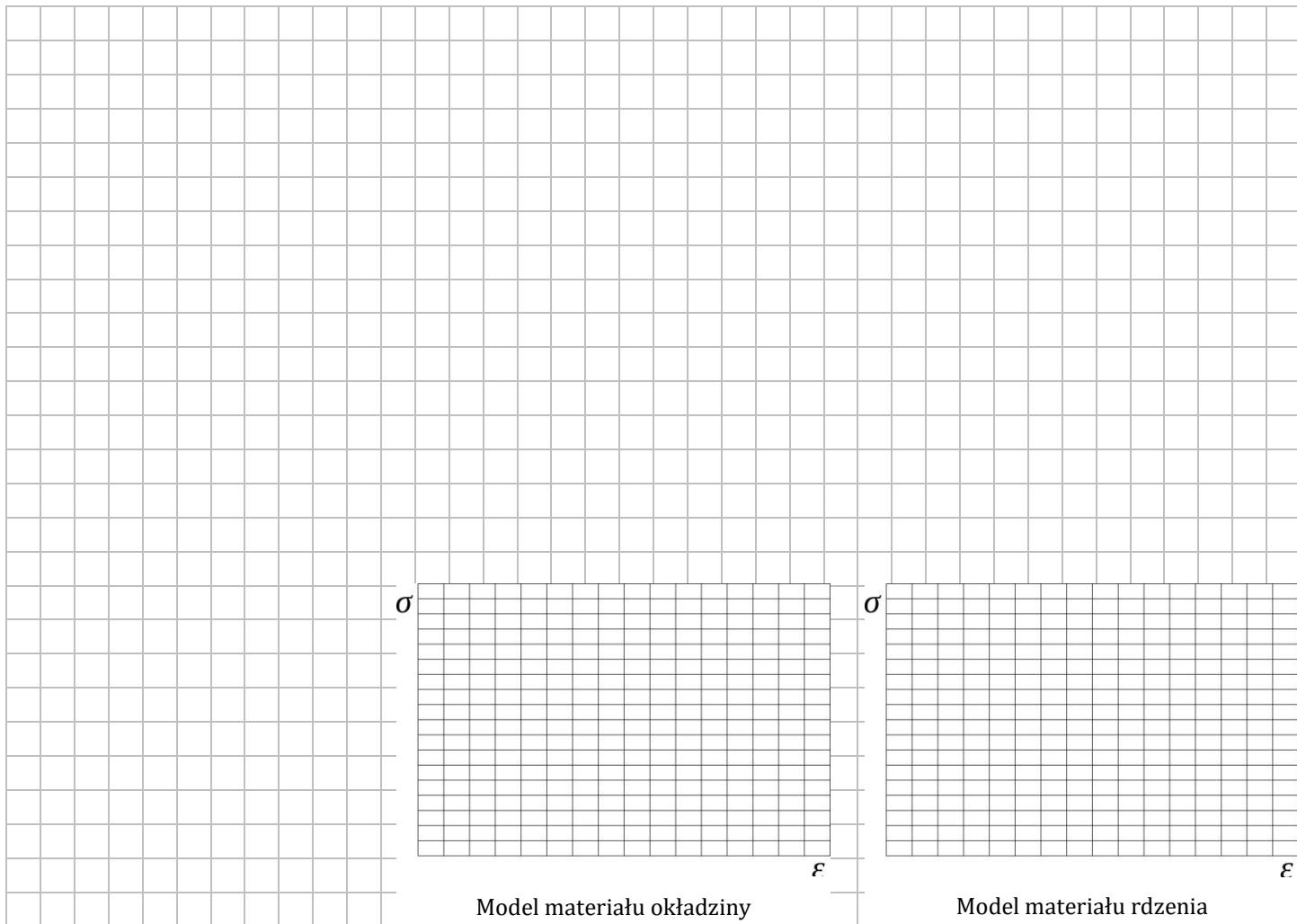
4.1 Model analityczny

$$w_{max} = \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\right)^2 \left[1 - 2 \frac{\tanh(C_b L)}{C_b L}\right] \frac{FL}{16G_c b t_c} + \frac{FL^3}{48\alpha_{11} b t_c^3}; \quad \sigma_x^f = \pm \left(\frac{1}{2} + \frac{t_f}{t_c}\right) \frac{E_f}{\alpha_{11}} \cdot \frac{FL}{4b t_c^2}$$

Naprężenia przybliżone są równe:



Zaproponować dwa modele belki – 2D i 3D; przedstawić geometrię, sposób podparcia i obciążenia; zaproponować modele materiału dla rdzenia i okładzin – przedstawić charakterystyki σ - ε



5. Porównanie wyników badań

W Tabeli 1 przedstawiono zestawienie wyników badań maksymalnego ugięcia belki otrzymanych różnymi metodami.

Tabela 1. Porównanie wyników uzyskanych różnymi metodami

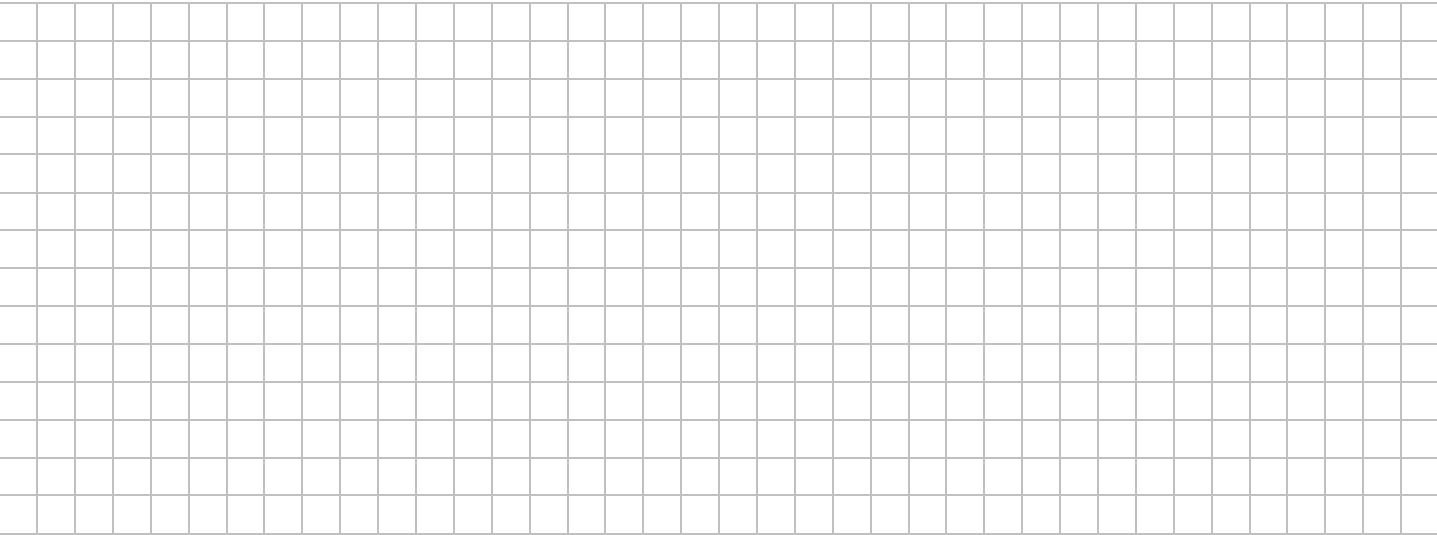
	Metoda analityczna		Metoda numeryczna	Eksperyment
	model dokładny	model przybliżony		
ugięcie w_{max} [mm]				
naprężenia σ_{max} [MPa]				—

6. Badanie wpływu własności mechanicznych rdzenia na sztywność belki

W Tabeli 2 przedstawiono wartości ugięć maksymalnych belki dla różnych wartości modułu Younga rdzenia. Na podstawie tabeli opracować następujący wykres – na osi poziomej moduł E_c , na osi pionowej ugięcie w_{max} .

Tabela 2. Wpływ własności mechanicznych rdzenia na ugięcie belki

E_c [MPa]	50	100	200	400	600	800	1200	1600
w_{max}^A [mm]								
w_{max}^M [mm]								



7. Wnioski

(omówić różnice między rozwiązaniem analitycznym, numerycznym i wynikiem eksperymentu; wpływ własności rdzenia na ugięcie)

