Podstawy optymalnego projektowania konstrukcji

Optymalizacja nieliniowa

Problem jednowymiarowy

Marcin Rodak
marcin.rodak@put.poznan.pl

Zakład Wytrzymałości i Konstrukcji
Instytut Mechaniki Stosowanej
Politechnika Poznańska

wrzesień 2015

Spis treści

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) \tag{1.1}$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$ oraz $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Funkcja unimodalna

Definition

Funkcję jednej zmiennej $f(x)$ nazywamy unimodalną w przedziale $[a, b]$ jeżeli

- $x_1 < x_2 < x^*$ to $f(x_1) > f(x_2)$,
- $x^* < x_1 < x_2$ to $f(x_1) < f(x_2)$

dla $x_1, x_2, x^* \in \mathbb{R}$ oraz dla x^* będącego minimum funkcji w tym przedziale.

Przedział poszukiwań

Zasada działania metod eliminacji

Minimum funkcji $f(x)$ jednej zmiennej i unimodalnej w przedziale $[a, b]$ można znaleźć poprzez zmniejszanie przedziału poszukiwań. Przyjmując:

Przedział poszukiwań

Zasada działania metod eliminacji

Minimum funkcji $f(x)$ jednej zmiennej i unimodalnej w przedziale $[a, b]$ można znaleźć poprzez zmniejszanie przedziału poszukiwań. Przyjmując:

- przy inicjalizacji algorytmu za przedział poszukiwań przedział $[x_L^{(1)}, x_U^{(1)}] = [a, b]$,

Przedział poszukiwań

Zasada działania metod eliminacji

Minimum funkcji $f(x)$ jednej zmiennej i unimodalnej w przedziale $[a, b]$ można znaleźć poprzez zmniejszanie przedziału poszukiwań. Przyjmując:

- przy inicjalizacji algorytmu za przedział poszukiwań przedział $[x_L^{(1)}, x_U^{(1)}] = [a, b]$,
- w kolejnych iteracjach zmniejszając jego długość w taki sposób, aby poszukiwane miniumum znajdowało się nowym przedziale, czyli

$$[x_L^{(i+1)}, x_U^{(i+1)}] \subset [x_L^{(i)}, x_U^{(i)}], \qquad x_U^{(i+1)} - x_L^{(i+1)} < x_U^{(i)} - x_U^{(i)},$$
$$x^* \in [x_L^{(i+1)}, x_U^{(i+1)}]$$

dla $i = 1, 2, 3, \ldots$. Ponadto długość przedziału poszukiwań musi dążyć do zera

$$\lim_{i\to\infty} x_U^{(i)} - x_L^{(i)} = 0,$$

lub

$$\lim_{i\to\infty} x_L^{(i)} = x^*, \qquad \lim_{i\to\infty} x_U^{(i)} = x^*.$$

Przedział poszukiwań

Przy redukowaniu długości przedziału $[x_L, x_U]$ korzystamy z następującego lematu:

Lemma

Jeżeli $f(x)$ *jest funkcją jednej zmiennej unimodalną w przedziale* $[x_L, x_U]$ *oraz* $x_L < x_1 < x_2 < x_U$ *to, jeśli*

- $f(x_1) < f(x_2)$ *wtedy minimum funkcji* $f^* = f(x^*)$ *znajduje się w przedziale* $[x_L, x_2]$*,*
- $f(x_1) > f(x_2)$ *wtedy minimum funkcji* $f^* = f(x^*)$ *znajduje się w przedziale* $[x_1, x_U]$*.*

Algorytm eliminacyjny

Algorytm eliminacyjny ma następującą postać:

- incjalizując algorytm podstawiamy

$$[x_L^{(1)}, x_U^{(1)}] = [a, b],$$

Algorytm eliminacyjny

Algorytm eliminacyjny ma następującą postać:

- incjalizując algorytm podstawiamy

$$[x_L^{(1)}, x_U^{(1)}] = [a, b],$$

- w i-tej iteracji obliczamy
  - $x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \in [x_L^{(i)}, x_U^{(i)}]$

Algorytm eliminacyjny

Algorytm eliminacyjny ma następującą postać:

- incjalizując algorytm podstawiamy

$$[x_L^{(1)}, x_U^{(1)}] = [a, b],$$

- w i-tej iteracji obliczamy
  - $x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \in [x_L^{(i)}, x_U^{(i)}]$
  - $f_1^{(i)} = f(x_1^{(i)})$, $f_2^{(i)} = f(x_2^{(i)})$

Algorytm eliminacyjny

Algorytm eliminacyjny ma następującą postać:

- incjalizując algorytm podstawiamy

$$[x_L^{(1)}, x_U^{(1)}] = [a, b],$$

- w i-tej iteracji obliczamy
  - $x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \in [x_L^{(i)}, x_U^{(i)}]$
  - $f_1^{(i)} = f(x_1^{(i)})$, $f_2^{(i)} = f(x_2^{(i)})$
  - $[x_L^{(i+1)}, x_U^{(i+1)}]$, gdzie

$$x_L^{(i+1)} = x_L^{(i)}, \qquad x_U^{(i+1)} = x_2^{(i)},$$

jeśli $f_1^{(i)} < f_2^{(i)}$

lub

$$x_L^{(i+1)} = x_1^{(i)}, \qquad x_U^{(i+1)} = x_U^{(i)},$$

jeśli $f_1^{(i)} > f_2^{(i)}$

Metoda podziału dwudzielnego (dychotomicznego) polega na podziale przedziału poszukiwań $[x_L, x_U]$ na dwie równe części oraz obliczeniu

Metoda poszukiwania dwudzielnego – wstęp

Metoda podziału dwudzielnego (dychotomicznego) polega na podziale przedziału poszukiwań $[x_L, x_U]$ na dwie równe części oraz obliczeniu

- wartości funkcji celu $f(x)$ w dwóch punktach przedziału poszukiwań

$$x_1 = \frac{x_L + x_U}{2} - \frac{\delta}{2}, \qquad x_2 = \frac{x_L + x_U}{2} + \frac{\delta}{2},$$

  gdzie δ jest mała liczbą w stosunku do długości przedziału poszukiwań,

Metoda poszukiwania dwudzielnego – wstęp

Metoda podziału dwudzielnego (dychotomicznego) polega na podziale przedziału poszukiwań $[x_L, x_U]$ na dwie równe części oraz obliczeniu

- wartości funkcji celu $f(x)$ w dwóch punktach przedziału poszukiwań

$$x_1 = \frac{x_L + x_U}{2} - \frac{\delta}{2}, \qquad x_2 = \frac{x_L + x_U}{2} + \frac{\delta}{2},$$

  gdzie δ jest mała liczbą w stosunku do długości przedziału poszukiwań,
- wartości pochodnej $f'(x)$ funkcji celu w punkcie

$$x_1 = \frac{x_L + x_U}{2}.$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – wstęp

Metoda podziału dwudzielnego (dychotomicznego) polega na podziale przedziału poszukiwań $[x_L, x_U]$ na dwie równe części oraz obliczeniu

- wartości funkcji celu $f(x)$ w dwóch punktach przedziału poszukiwań

  $$x_1 = \frac{x_L + x_U}{2} - \frac{\delta}{2}, \qquad x_2 = \frac{x_L + x_U}{2} + \frac{\delta}{2},$$

  gdzie δ jest mała liczbą w stosunku do długości przedziału poszukiwań,
- wartości pochodnej $f'(x)$ funkcji celu w punkcie

  $$x_1 = \frac{x_L + x_U}{2}.$$

W pierwszym przypadku jest to metoda bezgradientowa, natomiast w drugim gradientowa. Jeśli nie znamy wartości pochodnej funkcji możemy ją przybliżyć

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \tag{2.1}$$

gdzie $h \ll 1$.

Metoda poszukiwania dwudzielnego – procedura

Inicjalizacja algorytmu

- Dane:

$f(x)$	- funkcja celu,
$[a, b]$	- przedział poszukiwań,
δ	

Metoda poszukiwania dwudzielnego – procedura

Inicjalizacja algorytmu

- Dane:

$f(x)$	- funkcja celu,
$[a, b]$	- przedział poszukiwań,
δ	

- kryterium stopu:

$$\left| x_U^{(i)} - x_L^{(i)} \right| < \varepsilon,$$

gdzie $x_L^{(i)}$ i $x_U^{(i)}$ to krańce przedziału poszukiwań

Metoda poszukiwania dwudzielnego – procedura

Inicjalizacja algorytmu

- Dane:

$$\begin{array}{ll} f(x) & \text{- funkcja celu,} \\ [a,b] & \text{- przedział poszukiwań,} \\ \delta & \end{array}$$

- kryterium stopu:

$$\left| x_U^{(i)} - x_L^{(i)} \right| < \varepsilon,$$

  gdzie $x_L^{(i)}$ i $x_U^{(i)}$ to krańce przedziału poszukiwań

- podstawiamy

$$x_L^{(1)} = a, \qquad x_U^{(1)} = b,$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – procedura

i-ta iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(i)} = \frac{x_L^{(i)} + x_U^{(i)}}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad f_1^{(i)} = f(x_1^{(i)}),$$

$$x_2^{(i)} = \frac{x_L^{(i)} + x_U^{(i)}}{2} + \frac{\delta}{2}, \quad f_2^{(i)} = f(x_2^{(i)}),$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – procedura

i-ta iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(i)} = \frac{x_L^{(i)} + x_U^{(i)}}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad f_1^{(i)} = f(x_1^{(i)}),$$
$$x_2^{(i)} = \frac{x_L^{(i)} + x_U^{(i)}}{2} + \frac{\delta}{2}, \quad f_2^{(i)} = f(x_2^{(i)}),$$

- jeżeli $f_1^{(i)} < f_2^{(i)}$ to podstawiamy

$$x_L^{(i+1)} = x_L^{(i)},$$
$$x_U^{(i+1)} = x_2^{(i)},$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – procedura

i-ta iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(i)} = \frac{x_L^{(i)} + x_U^{(i)}}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad f_1^{(i)} = f(x_1^{(i)}),$$
$$x_2^{(i)} = \frac{x_L^{(i)} + x_U^{(i)}}{2} + \frac{\delta}{2}, \quad f_2^{(i)} = f(x_2^{(i)}),$$

- jeżeli $f_1^{(i)} > f_2^{(i)}$ to podstawiamy

$$x_L^{(i+1)} = x_1^{(i)},$$
$$x_U^{(i+1)} = x_U^{(i)},$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – procedura

i-ta iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(i)} = \frac{x_L^{(i)} + x_U^{(i)}}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad f_1^{(i)} = f(x_1^{(i)}),$$
$$x_2^{(i)} = \frac{x_L^{(i)} + x_U^{(i)}}{2} + \frac{\delta}{2}, \quad f_2^{(i)} = f(x_2^{(i)}),$$

- jeżeli $f_1^{(i)} > f_2^{(i)}$ to podstawiamy

$$x_L^{(i+1)} = x_1^{(i)},$$
$$x_U^{(i+1)} = x_U^{(i)},$$

- jeśli

$$\left| x_U^{(i+1)} - x_L^{(i+1)} \right| < \varepsilon$$

to

$$f^* = \min_{k=L,1,2,U} f(x_k^{(i)}),$$
$$x^* = x_k^{(i)} \quad \text{takie, że} \quad f(x_k^{(i)}) = f^*$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – uwagi

Uwagi

- długość kolejnych przedziałów poszukiwań $L_i = x_U^{(i)} - x_L^{(i)}$ wynosi w metodzie bezgradientowej

$$L_i = \frac{1}{2}L_{i-1} + \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2^{i-1}}L_1 + \left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)\delta \cong \frac{1}{2^{i-1}}L_1 + \delta. \qquad (2.2)$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – uwagi

Uwagi

- długość kolejnych przedziałów poszukiwań $L_i = x_U^{(i)} - x_L^{(i)}$ wynosi w metodzie bezgradientowej

$$L_i = \frac{1}{2}L_{i-1} + \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2^{i-1}}L_1 + \left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)\delta \cong \frac{1}{2^{i-1}}L_1 + \delta. \tag{2.2}$$

- długość przedziału poszukiwań $L_i \to \delta$, gdy $i \to \infty$,

Metoda poszukiwania dwudzielnego – uwagi

Uwagi

- długość kolejnych przedziałów poszukiwań $L_i = x_U^{(i)} - x_L^{(i)}$ wynosi w metodzie bezgradientowej

$$L_i = \frac{1}{2}L_{i-1} + \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2^{i-1}}L_1 + \left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)\delta \cong \frac{1}{2^{i-1}}L_1 + \delta. \qquad (2.2)$$

- długość przedziału poszukiwań $L_i \longrightarrow \delta$, gdy $i \longrightarrow \infty$,
- w metodzie gradientowej lub quasi-gradientowej wartość L_i obliczamy jak we wzorze (2.2) podstawiając $\delta = 0$. Zatem długość przedziału poszukiwań $L_i \longrightarrow 0$, gdy $i \longrightarrow \infty$,

Uwagi

- długość kolejnych przedziałów poszukiwań $L_i = x_U^{(i)} - x_L^{(i)}$ wynosi w metodzie bezgradientowej

$$L_i = \frac{1}{2}L_{i-1} + \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2^{i-1}}L_1 + \left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)\delta \cong \frac{1}{2^{i-1}}L_1 + \delta. \qquad (2.2)$$

- długość przedziału poszukiwań $L_i \to \delta$, gdy $i \to \infty$,
- w metodzie gradientowej lub quasi-gradientowej wartość L_i obliczamy jak we wzorze (2.2) podstawiając $\delta = 0$. Zatem długość przedziału poszukiwań $L_i \to 0$, gdy $i \to \infty$,
- w metodzie quasi-gradientowej długość przedziału poszukiwań musi być większa niż wartość $2h$ z wzoru (2.1).

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład

Example (Przykład)

Znaleźć minimum funkcji

$$f(x) = x(x - 1.5)$$

w przedziale $[0, 1]$ przy użyciu metody podziału dwudzielnego z dokładnością do $\varepsilon = 0.01$.

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Inicjalizacja algorytmu

- Dane:

$$f(x) = x(x - 1.5),$$
$$[a, b] = [0, 1],$$
$$\delta = 0.02,$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Inicjalizacja algorytmu

- Dane:

$$f(x) = x(x - 1.5),$$
$$[a, b] = [0, 1],$$
$$\delta = 0.02,$$

- kryterium stopu:

$$\left| x_U^{(i)} - x_L^{(i)} \right| < 0.1,$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Inicjalizacja algorytmu

- Dane:

$$f(x) = x(x - 1.5),$$
$$[a, b] = [0, 1],$$
$$\delta = 0.02,$$

- kryterium stopu:

$$\left| x_U^{(i)} - x_L^{(i)} \right| < 0.1,$$

- podstawiamy

$$x_L^{(1)} = 0, \qquad x_U^{(1)} = 1,$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- obliczamy

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= 0.499000, \qquad f_1^{(1)} = -0.499499, \\
x_2^{(1)} &= 0.501000, \qquad f_2^{(1)} = -0.500499,
\end{aligned}
$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(1)} = 0.499000, \qquad f_1^{(1)} = -0.499499,$$
$$x_2^{(1)} = 0.501000, \qquad f_2^{(1)} = -0.500499,$$

- $f_1^{(1)} > f_2^{(1)}$ więc

$$x_L^{(2)} = x_1^{(1)} = 0.499000,$$
$$x_U^{(2)} = x_U^{(1)} = 1.000000,$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- obliczamy

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= 0.499000, \qquad & f_1^{(1)} &= -0.499499,\\
x_2^{(1)} &= 0.501000, \qquad & f_2^{(1)} &= -0.500499,
\end{aligned}
$$

- $f_1^{(1)} > f_2^{(1)}$ więc

$$
\begin{aligned}
x_L^{(2)} &= x_1^{(1)} = 0.499000,\\
x_U^{(2)} &= x_U^{(1)} = 1.000000,
\end{aligned}
$$

- $$\left| x_U^{(2)} - x_L^{(2)} \right| = 0.501000 > 0.01 = \varepsilon$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Druga iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(2)} = 0.748500, \qquad f_1^{(2)} = -0.562498,$$
$$x_2^{(2)} = 0.750500, \qquad f_2^{(2)} = -0.562500,$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Druga iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(2)} = 0.748500, \qquad f_1^{(2)} = -0.562498,$$
$$x_2^{(2)} = 0.750500, \qquad f_2^{(2)} = -0.562500,$$

- $f_1^{(2)} > f_2^{(2)}$ więc

$$x_L^{(3)} = x_1^{(2)} = 0.748500,$$
$$x_U^{(3)} = x_U^{(2)} = 1.000000,$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Druga iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(2)} = 0.748500, \qquad f_1^{(2)} = -0.562498,$$
$$x_2^{(2)} = 0.750500, \qquad f_2^{(2)} = -0.562500,$$

- $f_1^{(2)} > f_2^{(2)}$ więc

$$x_L^{(3)} = x_1^{(2)} = 0.748500,$$
$$x_U^{(3)} = x_U^{(2)} = 1.000000,$$

- $$\left| x_U^{(3)} - x_L^{(3)} \right| = 0.251500 > 0.01 = \varepsilon$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Trzecia iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(3)} = 0.873250, \qquad f_1^{(3)} = -0.547309,$$
$$x_2^{(3)} = 0.875250, \qquad f_2^{(3)} = -0.546812,$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Trzecia iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(3)} = 0.873250, \quad f_1^{(3)} = -0.547309,$$
$$x_2^{(3)} = 0.875250, \quad f_2^{(3)} = -0.546812,$$

- $f_1^{(3)} < f_2^{(3)}$ więc

$$x_L^{(4)} = x_L^{(3)} = 0.748500,$$
$$x_U^{(4)} = x_2^{(3)} = 0.875250,$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Trzecia iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(3)} = 0.873250, \qquad f_1^{(3)} = -0.547309,$$
$$x_2^{(3)} = 0.875250, \qquad f_2^{(3)} = -0.546812,$$

- $f_1^{(3)} < f_2^{(3)}$ więc

$$x_L^{(4)} = x_L^{(3)} = 0.748500,$$
$$x_U^{(4)} = x_2^{(3)} = 0.875250,$$

- $$\left| x_U^{(4)} - x_L^{(4)} \right| = 0.126750 > 0.01 = \varepsilon$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Czwarta iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(4)} = 0.810875, \qquad f_1^{(4)} = -0.558794,$$
$$x_2^{(4)} = 0.812875, \qquad f_2^{(4)} = -0.558547,$$

Czwarta iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(4)} = 0.810875, \qquad f_1^{(4)} = -0.558794,$$
$$x_2^{(4)} = 0.812875, \qquad f_2^{(4)} = -0.558547,$$

- $f_1^{(4)} < f_2^{(4)}$ więc

$$x_L^{(5)} = x_L^{(4)} = 0.748500,$$
$$x_U^{(5)} = x_2^{(4)} = 0.812875,$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Czwarta iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(4)} = 0.810875, \qquad f_1^{(4)} = -0.558794,$$
$$x_2^{(4)} = 0.812875, \qquad f_2^{(4)} = -0.558547,$$

- $f_1^{(4)} < f_2^{(4)}$ więc

$$x_L^{(5)} = x_L^{(4)} = 0.748500,$$
$$x_U^{(5)} = x_2^{(4)} = 0.812875,$$

- $$\left| x_U^{(5)} - x_L^{(5)} \right| = 0.064375 > 0.01 = \varepsilon$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Piąta iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(5)} = 0.779688, \qquad f_1^{(5)} = -0.561619,$$
$$x_2^{(5)} = 0.781688, \qquad f_2^{(5)} = -0.561496,$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Piąta iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(5)} = 0.779688, \qquad f_1^{(5)} = -0.561619,$$
$$x_2^{(5)} = 0.781688, \qquad f_2^{(5)} = -0.561496,$$

- $f_1^{(5)} < f_2^{(5)}$ więc

$$x_L^{(6)} = x_L^{(5)} = 0.748500,$$
$$x_U^{(6)} = x_2^{(5)} = 0.781688,$$

Piąta iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(5)} = 0.779688, \qquad f_1^{(5)} = -0.561619,$$
$$x_2^{(5)} = 0.781688, \qquad f_2^{(5)} = -0.561496,$$

- $f_1^{(5)} < f_2^{(5)}$ więc

$$x_L^{(6)} = x_L^{(5)} = 0.748500,$$
$$x_U^{(6)} = x_2^{(5)} = 0.781688,$$

- $$\left| x_U^{(6)} - x_L^{(6)} \right| = 0.033187 > 0.01 = \varepsilon$$

Szósta iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(6)} = 0.764094, \qquad f_1^{(6)} = -0.562301,$$
$$x_2^{(6)} = 0.766094, \qquad f_2^{(6)} = -0.562241,$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Szósta iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(6)} = 0.764094, \qquad f_1^{(6)} = -0.562301,$$
$$x_2^{(6)} = 0.766094, \qquad f_2^{(6)} = -0.562241,$$

- $f_1^{(6)} < f_2^{(6)}$ więc

$$x_L^{(7)} = x_L^{(6)} = 0.748500,$$
$$x_U^{(7)} = x_2^{(6)} = 0.766094,$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Szósta iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(6)} = 0.764094, \qquad f_1^{(6)} = -0.562301,$$
$$x_2^{(6)} = 0.766094, \qquad f_2^{(6)} = -0.562241,$$

- $f_1^{(6)} < f_2^{(6)}$ więc

$$x_L^{(7)} = x_L^{(6)} = 0.748500,$$
$$x_U^{(7)} = x_2^{(6)} = 0.766094,$$

- $$\left| x_U^{(7)} - x_L^{(7)} \right| = 0.017594 > 0.01 = \varepsilon$$

Siódma iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(7)} = 0.756297, \qquad f_1^{(7)} = -0.562460,$$
$$x_2^{(7)} = 0.758297, \qquad f_2^{(7)} = -0.562431,$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Siódma iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(7)} = 0.756297, \qquad f_1^{(7)} = -0.562460,$$
$$x_2^{(7)} = 0.758297, \qquad f_2^{(7)} = -0.562431,$$

- $f_1^{(7)} < f_2^{(7)}$ więc

$$x_L^{(8)} = x_L^{(7)} = 0.748500,$$
$$x_U^{(8)} = x_2^{(7)} = 0.758297,$$

Metoda poszukiwania dwudzielnego – przykład - rozwiązanie

Siódma iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(7)} = 0.756297, \quad f_1^{(7)} = -0.562460,$$
$$x_2^{(7)} = 0.758297, \quad f_2^{(7)} = -0.562431,$$

- $f_1^{(7)} < f_2^{(7)}$ więc

$$x_L^{(8)} = x_L^{(7)} = 0.748500,$$
$$x_U^{(8)} = x_2^{(7)} = 0.758297,$$

-

$$\left| x_U^{(8)} - x_L^{(8)} \right| = 0.009797 < 0.01 = \varepsilon,$$

więc

$$f^* = \min_{k=L,2,3,U} f(x_k^{(7)}) = f(x_L^{(7)}) = -0.562498,$$

$$x^* = x_L^{(7)} = 0.748500.$$

Metoda Fibonacci – wprowadzenie

W metodzie Fibonacci'ego korzysta się z liczb Fibonacci'ego, które definujemy następująco:

Definition

$$F_1 = F_2 = 1,$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n = 3, 4, 5, \ldots$$

Kilkanaście pierwszych liczb ciągu Fibonacci'ego

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots$$

Metoda Fibonacci – wprowadzenie

W metodzie Fibonacci'ego długość przedziału poszukiwań, która w i-tej iteracji równa

$$L_i = x_U^{(i)} - x_L^{(i)}$$

jest zmniejszana o wartość w następujący sposób

$$L_i = \frac{F_{n+1-i}}{F_{n+2-i}} L_{i-1} = \frac{F_{n+1-i}}{F_n} L_1$$

dla $i = 2, 3, \ldots, n$, czyli

$$L_{n-1} = \frac{F_2}{F_3} L_{n-1} = \frac{1}{2} L_{n-2} = \frac{1}{F_n} L_1.$$

Wniosek

Inicjalizując algortym, musimy znać

- dokładność z jaką chcemy otrzymać punkt, w którym funkcja $f(x)$ przyjmuje minimum,
- długość początkowego przedziału poszukiwań.

Jeżeli

$$x_U^{(n)} - x_L^{(n)} < \varepsilon$$

to liczba n musi spełniać warunek

$$F_n > \frac{L_1}{\varepsilon}$$

Metoda Fibonacci – wprowadzenie

W metodzie Fibonacci'ego punkty $x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \in [x_L^{(i)}, x_U^{(i)}]$ wybierane są następująco:

$$x_1^{(i)} = x_U^{(i)} - L_{i+1},$$
$$x_2^{(i)} = x_L^{(i)} + L_{i+1},$$

czyli

$$x_1^{(i)} = \alpha_i \, x_L^{(i)} + (1 - \alpha_i) \, x_U^{(i)},$$
$$x_2^{(i)} = (1 - \alpha_i) \, x_L^{(i)} + \alpha_i \, x_U^{(i)},$$

gdzie

$$\alpha_i = \frac{F_{n-i}}{F_{n-i+1}}.$$

Metoda Fibonacci – wprowadzenie

W metodzie Fibonacci'ego punkty $x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \in [x_L^{(i)}, x_U^{(i)}]$ wybierane są następująco:

$$x_1^{(i)} = x_U^{(i)} - L_{i+1},$$
$$x_2^{(i)} = x_L^{(i)} + L_{i+1},$$

czyli

$$x_1^{(i)} = \alpha_i\, x_L^{(i)} + (1-\alpha_i)\, x_U^{(i)},$$
$$x_2^{(i)} = (1-\alpha_i)\, x_L^{(i)} + \alpha_i\, x_U^{(i)},$$

gdzie

$$\alpha_i = \frac{F_{n-i}}{F_{n-i+1}}.$$

Wniosek

W kolejnych iteracjach (oprócz pierwszej) wystarczy obliczyć jeden punkt wewnętrzny

Metoda Fibonacci – wprowadzenie

W metodzie Fibonacci'ego punkty $x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \in [x_L^{(i)}, x_U^{(i)}]$ wybierane są następująco:

$$x_1^{(i)} = x_U^{(i)} - L_{i+1},$$
$$x_2^{(i)} = x_L^{(i)} + L_{i+1},$$

czyli

$$x_1^{(i)} = \alpha_i \, x_L^{(i)} + (1 - \alpha_i) \, x_U^{(i)},$$
$$x_2^{(i)} = (1 - \alpha_i) \, x_L^{(i)} + \alpha_i \, x_U^{(i)},$$

gdzie

$$\alpha_i = \frac{F_{n-i}}{F_{n-i+1}}.$$

Wniosek

W kolejnych iteracjach (oprócz pierwszej) wystarczy obliczyć jeden punkt wewnętrzny

- jeśli
$$f(x_1^{(i-1)}) < f(x_2^{(i-1)})$$
to
$$x_2^{(i)} = x_1^{(i-1)},$$

Metoda Fibonacci – wprowadzenie

W metodzie Fibonacci'ego punkty $x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \in [x_L^{(i)}, x_U^{(i)}]$ wybierane są następująco:

$$x_1^{(i)} = x_U^{(i)} - L_{i+1},$$
$$x_2^{(i)} = x_L^{(i)} + L_{i+1},$$

czyli

$$x_1^{(i)} = \alpha_i \, x_L^{(i)} + (1-\alpha_i) \, x_U^{(i)},$$
$$x_2^{(i)} = (1-\alpha_i) \, x_L^{(i)} + \alpha_i \, x_U^{(i)},$$

gdzie

$$\alpha_i = \frac{F_{n-i}}{F_{n-i+1}}.$$

Wniosek

W kolejnych iteracjach (oprócz pierwszej) wystarczy obliczyć jeden punkt wewnętrzny

- jeśli
$$f(x_1^{(i-1)}) < f(x_2^{(i-1)})$$
to
$$x_2^{(i)} = x_1^{(i-1)},$$
- jeśli
$$f(x_1^{(i-1)}) > f(x_2^{(i-1)})$$
to
$$x_1^{(i)} = x_2^{(i-1)}.$$

Metoda Fibonacci – procedura

Inicjalizacja algorytmu

- Dane:

$f(x)$	- funkcja celu,
$[a, b]$	- przedział poszukiwań,
ε	- dokładność obliczeń,

Metoda Fibonacci – procedura

Inicjalizacja algorytmu

- Dane:

$$\begin{array}{ll} f(x) & \text{- funkcja celu,} \\ [a,b] & \text{- przedział poszukiwań,} \\ \varepsilon & \text{- dokładność obliczeń,} \end{array}$$

- kryterium stopu:

$$\left|x_U^{(i)} - x_L^{(i)}\right| < \varepsilon,$$

gdzie $x_L^{(i)}$ i $x_U^{(i)}$ to krańce przedziału poszukiwań. Na podstawie wartości ε oblicza się ilość iteracji algorytmu N,

Metoda Fibonacci – procedura

Inicjalizacja algorytmu

- Dane:

$$
\begin{array}{ll}
f(x) & \text{- funkcja celu,} \\
[a, b] & \text{- przedział poszukiwań,} \\
\varepsilon & \text{- dokładność obliczeń,}
\end{array}
$$

- kryterium stopu:

$$\left| x_U^{(i)} - x_L^{(i)} \right| < \varepsilon,$$

  gdzie $x_L^{(i)}$ i $x_U^{(i)}$ to krańce przedziału poszukiwań. Na podstawie wartości ε oblicza się ilość iteracji algorytmu N,

- podstawiamy

$$x_L^{(1)} = a, \qquad x_U^{(1)} = b, \qquad L_1 = b - a.$$

Metoda Fibonacci – procedura

Pierwsza iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(1)} = \alpha_1\, x_L^{(1)} + (1-\alpha_1)\, x_U^{(1)}, \quad f_1^{(1)} = f(x_1^{(1)}),$$
$$x_2^{(1)} = (1-\alpha_1)\, x_L^{(1)} + \alpha_1\, x_U^{(1)}, \quad f_2^{(1)} = f(x_2^{(1)}),$$

  gdzie $\alpha_1 = \frac{F_{n-1}}{F_n}$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_1^{(1)}$ i $f_2^{(1)}$,

Metoda Fibonacci – procedura

Pierwsza iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(1)} = \alpha_1\, x_L^{(1)} + (1-\alpha_1)\, x_U^{(1)}, \quad f_1^{(1)} = f(x_1^{(1)}),$$
$$x_2^{(1)} = (1-\alpha_1)\, x_L^{(1)} + \alpha_1\, x_U^{(1)}, \quad f_2^{(1)} = f(x_2^{(1)}),$$

  gdzie $\alpha_1 = \frac{F_{n-1}}{F_n}$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_1^{(1)}$ i $f_2^{(1)}$,
- jeżeli $f_1^{(1)} < f_2^{(1)}$ to podstawiamy

$$x_L^{(2)} = x_L^{(1)},$$
$$x_U^{(2)} = x_2^{(1)}.$$

Metoda Fibonacci – procedura

Pierwsza iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(1)} = \alpha_1\, x_L^{(1)} + (1-\alpha_1)\, x_U^{(1)}, \quad f_1^{(1)} = f(x_1^{(1)}),$$
$$x_2^{(1)} = (1-\alpha_1)\, x_L^{(1)} + \alpha_1\, x_U^{(1)}, \quad f_2^{(1)} = f(x_2^{(1)}),$$

  gdzie $\alpha_1 = \frac{F_{n-1}}{F_n}$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_1^{(1)}$ i $f_2^{(1)}$,
- jeżeli $f_1^{(1)} > f_2^{(1)}$ to podstawiamy

$$x_L^{(2)} = x_1^{(1)},$$
$$x_U^{(2)} = x_U^{(1)}.$$

Metoda Fibonacci – procedura

Pierwsza iteracja

- obliczamy

$$x_1^{(1)} = \alpha_1\, x_L^{(1)} + (1-\alpha_1)\, x_U^{(1)}, \quad f_1^{(1)} = f(x_1^{(1)}),$$
$$x_2^{(1)} = (1-\alpha_1)\, x_L^{(1)} + \alpha_1\, x_U^{(1)}, \quad f_2^{(1)} = f(x_2^{(1)}),$$

  gdzie $\alpha_1 = \frac{F_{n-1}}{F_n}$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_1^{(1)}$ i $f_2^{(1)}$,
- jeżeli $f_1^{(1)} > f_2^{(1)}$ to podstawiamy

$$x_L^{(2)} = x_1^{(1)},$$
$$x_U^{(2)} = x_U^{(1)}.$$

Metoda Fibonacci – procedura

i-ta iteracja

- jeżeli $f_1^{(i-1)} < f_2^{(i-1)}$ to podstawiamy i obliczamy

$$x_1^{(i)} = \alpha_i\, x_L^{(i)} + (1-\alpha_i)\, x_U^{(i)}, \qquad f_1^{(i)} = f(x_1^{(i)}),$$
$$x_2^{(i)} = x_1^{(i-1)}, \qquad f_2^{(i)} = f_1^{(i-1)}),$$

gdzie $\alpha_i = \frac{F_{n-i}}{F_{n-i+1}}$

Metoda Fibonacci – procedura

i-ta iteracja

- jeżeli $f_1^{(i-1)} > f_2^{(i-1)}$ to podstawiamy i obliczamy

$$x_1^{(i)} = x_2^{(i-1)}, \qquad f_1^{(i)} = f_2^{(i-1)}),$$
$$x_2^{(i)} = (1-\alpha_i)\, x_L^{(i)} + \alpha_i\, x_U^{(i)}, \qquad f_2^{(i)} = f(x_2^{(i)}),$$

gdzie $\alpha_i = \frac{F_{n-i}}{F_{n-i+1}}$

Metoda Fibonacci – procedura

i-ta iteracja

- jeżeli $f_1^{(i-1)} > f_2^{(i-1)}$ to podstawiamy i obliczamy

$$x_1^{(i)} = x_2^{(i-1)}, \qquad f_1^{(i)} = f_2^{(i-1)}),$$
$$x_2^{(i)} = (1-\alpha_i)\, x_L^{(i)} + \alpha_i\, x_U^{(i)}, \qquad f_2^{(i)} = f(x_2^{(i)}),$$

gdzie $\alpha_i = \frac{F_{n-i}}{F_{n-i+1}}$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_1^{(i)}$ i $f_2^{(i)}$,

Metoda Fibonacci – procedura

i-ta iteracja

- jeżeli $f_1^{(i-1)} > f_2^{(i-1)}$ to podstawiamy
  i obliczamy

$$x_1^{(i)} = x_2^{(i-1)}, \qquad f_1^{(i)} = f_2^{(i-1)}),$$
$$x_2^{(i)} = (1-\alpha_i)\, x_L^{(i)} + \alpha_i\, x_U^{(i)}, \qquad f_2^{(i)} = f(x_2^{(i)}),$$

  gdzie $\alpha_i = \frac{F_{n-i}}{F_{n-i+1}}$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_1^{(i)}$ i $f_2^{(i)}$,

- jeżeli $f_1^{(i)} < f_2^{(i)}$ to podstawiamy

$$x_L^{(i+1)} = x_L^{(i)},$$
$$x_U^{(i+1)} = x_2^{(i)}.$$

Metoda Fibonacci – procedura

i-ta iteracja

- jeżeli $f_1^{(i-1)} > f_2^{(i-1)}$ to podstawiamy
  i obliczamy

$$
\begin{aligned}
x_1^{(i)} &= x_2^{(i-1)}, & f_1^{(i)} &= f_2^{(i-1)}), \\
x_2^{(i)} &= (1-\alpha_i)\, x_L^{(i)} + \alpha_i\, x_U^{(i)}, & f_2^{(i)} &= f(x_2^{(i)}),
\end{aligned}
$$

  gdzie $\alpha_i = \frac{F_{n-i}}{F_{n-i+1}}$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_1^{(i)}$ i $f_2^{(i)}$,

- jeżeli $f_1^{(i)} > f_2^{(i)}$ to podstawiamy

$$
\begin{aligned}
x_L^{(i+1)} &= x_1^{(i)}, \\
x_U^{(i+1)} &= x_U^{(i)}.
\end{aligned}
$$

Metoda Fibonacci – procedura

$n - 2$-ga iteracja

- jeżeli $f_1^{(n-3)} < f_2^{(n-3)}$ to podstawiamy i obliczamy

$$x_1^{(n-2)} = x_1^{(n-3)} - \delta, \quad f_1^{(n-2)} = f(x_1^{(n-2)}),$$
$$x_2^{(n-2)} = x_1^{(n-3)}, \quad f_2^{(n-2)} = f_1^{(n-3)}),$$

gdzie $\delta \ll 1$

Metoda Fibonacci – procedura

$n-2$-ga iteracja

- jeżeli $f_1^{(n-3)} > f_2^{(n-3)}$ to podstawiamy i obliczamy

  $$\begin{aligned} x_1^{(n-2)} &= x_2^{(n-3)}, & f_1^{(n-2)} &= f_2^{(n-3)}), \\ x_2^{(n-2)} &= x_2^{(n-3)} + \delta, & f_2^{(n-2)} &= f(x_2^{(n-2)}), \end{aligned}$$

  gdzie $\delta \ll 1$

Metoda Fibonacci – procedura

$n-2$-ga iteracja

- jeżeli $f_1^{(n-3)} > f_2^{(n-3)}$ to podstawiamy i obliczamy

$$x_1^{(n-2)} = x_2^{(n-3)}, \qquad f_1^{(n-2)} = f_2^{(n-3)}),$$
$$x_2^{(n-2)} = x_2^{(n-3)} + \delta, \quad f_2^{(n-2)} = f(x_2^{(n-2)}),$$

  gdzie $\delta \ll 1$

- obliczamy

$$f^* = \min_{k=L,1,2,U} f(x_k^{(n-2)}),$$
$$x^* = x_k^{(n-2)} \quad \text{takie, że} \quad f(x_k^{(n-2)}) = f^*$$

Metoda Fibonacci – uwagi

Uwagi

Liczbę iteracji n należy obliczyć inicjalizując algorytm (przed pierwszą iteracją). Liczba n musi spełniać zależność

$$F_n > \frac{L_1}{\varepsilon}.$$

n	F_n	$\frac{L_n}{L_1}$
3	2	0.500000
4	3	0.333333
5	5	0.200000
6	8	0.125000
7	13	0.076923
8	21	0.047619
9	34	0.029412
10	55	0.018182
11	89	0.011236
12	144	0.006944
13	233	0.004292
14	377	0.002653
15	610	0.001639

Metoda Fibonacci – uwagi

Uwagi

W i-tej iteracji, gdzie $i = n - 2$ zachodzi związek

$$x_1^{(n-2)} = x_2^{(n-2)},$$

ponieważ $\alpha_{n-2} = \frac{F_2}{F_3} = \frac{1}{2}$.
Zatem można obliczyć $x_1^{(n-2)}$ lub $x_2^{(n-2)}$ w taki sposób, aby

$$x_2^{(n-1)} - x_1^{(n-1)} = \delta,$$

wtedy ostatni przedział poszukiwań będzie miał długość $L_{n-1} = \frac{1}{2}L_{n-2} + \delta$.

Metoda Fibonacci – uwagi

Uwagi

Wzory na punkty wewnętrzne

$$x_1^{(i)} = \alpha_i \, x_L^{(i)} + (1 - \alpha_i) \, x_U^{(i)},$$
$$x_2^{(i)} = (1 - \alpha_i) \, x_L^{(i)} + \alpha_i \, x_U^{(i)},$$

można zastąpić następującymi wzorami

$$x_1^{(i)} = (1 - \alpha_{i+1}) \, x_L^{(i)} + \alpha_{i+1} \, x_2^{(i)},$$
$$x_2^{(i)} = x_1^{(i-1)},$$

w przypadku, gdy $f_1^{(i-1)} < f_2^{(i-1)}$ oraz

$$x_1^{(i)} = x_2^{(i-1)},$$
$$x_2^{(i)} = \alpha_{i+1} \, x_1^{(i)} + (1 - \alpha_{i+1}) \, x_U^{(i)},$$

w przypadku, gdy $f_1^{(i-1)} > f_2^{(i-1)}$.

Example (Przykład)

Znaleźć minimum funkcji

$$f(x) = 0.65 - \frac{0.75}{1+x^2} - 0.65\,x\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$$

w przedziale $(0,3]$ przy użyciu metody Fibonacci'ego dla $n=6$.

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a = 0, \qquad x_4^{(1)} = b = 3, \qquad L_1 = b - a = 3,$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a = 0, \qquad x_4^{(1)} = b = 3, \qquad L_1 = b - a = 3,$$

- obliczamy:

$$L_2 = \frac{F_5}{F_6} L_1 = 1.846154,$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a = 0, \qquad x_4^{(1)} = b = 3, \qquad L_1 = b - a = 3,$$

- obliczamy:

$$L_2 = \frac{F_5}{F_6} L_1 = 1.846154,$$
$$x_2^{(1)} = \frac{F_5}{F_6} x_1^{(1)} + \frac{F_4}{F_6} x_4^{(1)} = 1.153846,$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a = 0, \qquad x_4^{(1)} = b = 3, \qquad L_1 = b - a = 3,$$

- obliczamy:

$$L_2 = \frac{F_5}{F_6} L_1 = 1.846154,$$
$$x_2^{(1)} = \frac{F_5}{F_6} x_1^{(1)} + \frac{F_4}{F_6} x_4^{(1)} = 1.153846,$$
$$x_3^{(1)} = \frac{F_4}{F_6} x_1^{(1)} + \frac{F_3}{F_6} x_4^{(1)} = 1.846154,$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a = 0, \qquad x_4^{(1)} = b = 3, \qquad L_1 = b - a = 3,$$

- obliczamy:

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{F_5}{F_6} L_1 = 1.846154, \\ x_2^{(1)} &= \frac{F_5}{F_6} x_1^{(1)} + \frac{F_4}{F_6} x_4^{(1)} = 1.153846, \\ x_3^{(1)} &= \frac{F_4}{F_6} x_1^{(1)} + \frac{F_3}{F_6} x_4^{(1)} = 1.846154, \end{aligned}$$

- obliczamy

$$\begin{aligned} f_2^{(1)} &= f(x_2^{(1)}) = -0.207269, \\ f_3^{(1)} &= f(x_3^{(1)}) = -0.115842. \end{aligned}$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

druga iteracja

- obliczamy

$$L_3 = \frac{F_4}{F_5} L_2 = 1.153846,$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

druga iteracja

- obliczamy

$$L_3 = \frac{F_4}{F_5} L_2 = 1.153846,$$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(1)}$ i $f_3^{(1)}$,
- $f_2^{(1)} < f_3^{(1)}$ więc

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= x_1^{(1)} = 0, \\
x_3^{(2)} &= x_2^{(1)} = 1.153846, \\
x_4^{(2)} &= x_3^{(1)} = 1.846154, \\
x_2^{(2)} &= \frac{F_4}{F_5} x_1^{(2)} + \frac{F_3}{F_5} x_4^{(2)} = 0.692308.
\end{aligned}$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

druga iteracja

- obliczamy

$$L_3 = \frac{F_4}{F_5} L_2 = 1.153846,$$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(1)}$ i $f_3^{(1)}$,
- $f_2^{(1)} < f_3^{(1)}$ więc

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= x_1^{(1)} = 0,\\
x_3^{(2)} &= x_2^{(1)} = 1.153846,\\
x_4^{(2)} &= x_3^{(1)} = 1.846154,\\
x_2^{(2)} &= \frac{F_4}{F_5} x_1^{(2)} + \frac{F_3}{F_5} x_4^{(2)} = 0.692308.
\end{aligned}$$

- obliczamy

$$\begin{aligned}
f_2^{(2)} &= f(x_2^{(2)}) = -0.291363,\\
f_3^{(2)} &= f_2^{(1)} = -0.207269.
\end{aligned}$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

trzecia iteracja

- obliczamy

$$L_4 = \frac{F_3}{F_4} L_3 = 0.692308,$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

trzecia iteracja

- obliczamy

$$L_4 = \frac{F_3}{F_4} L_3 = 0.692308,$$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(2)}$ i $f_3^{(2)}$,
- $f_2^{(2)} < f_3^{(2)}$ więc

$$\begin{aligned} x_1^{(3)} &= x_1^{(2)} = 0, \\ x_3^{(3)} &= x_2^{(2)} = 0.692308, \\ x_4^{(3)} &= x_3^{(2)} = 1.153846, \\ x_2^{(3)} &= \frac{F_3}{F_4} x_1^{(2)} + \frac{F_2}{F_4} x_4^{(2)} = 0.461538. \end{aligned}$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

trzecia iteracja

- obliczamy

$$L_4 = \frac{F_3}{F_4} L_3 = 0.692308,$$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(2)}$ i $f_3^{(2)}$,
- $f_2^{(2)} < f_3^{(2)}$ więc

$$\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= x_1^{(2)} = 0, \\
x_3^{(3)} &= x_2^{(2)} = 0.692308, \\
x_4^{(3)} &= x_3^{(2)} = 1.153846, \\
x_2^{(3)} &= \frac{F_3}{F_4} x_1^{(2)} + \frac{F_2}{F_4} x_4^{(2)} = 0.461538.
\end{aligned}$$

- obliczamy

$$\begin{aligned}
f_2 &= f(x_2^{(3)}) = -0.309809, \\
f_3 &= f_2^{(2)} = -0.291363.
\end{aligned}$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

czwarta iteracja

- obliczamy

$$L_5 = \frac{F_2}{F_3} L_3 = 0.461538,$$

czwarta iteracja

- obliczamy

$$L_5 = \frac{F_2}{F_3} L_3 = 0.461538,$$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(3)}$ i $f_3^{(3)}$,
- $f_2^{(3)} < f_3^{(3)}$ więc

$$x_1^{(4)} = x_1^{(3)} = 0,$$
$$x_3^{(4)} = x_2^{(3)} = 0.461538,$$
$$x_4^{(4)} = x_3^{(3)} = 0.692308,$$
$$x_2^{(4)} = \frac{F_2}{F_3} x_1^{(2)} + \frac{F_1}{F_3} x_4^{(2)} = 0.230769.$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

czwarta iteracja

- obliczamy

$$L_5 = \frac{F_2}{F_3} L_3 = 0.461538,$$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(3)}$ i $f_3^{(3)}$,
- $f_2^{(3)} < f_3^{(3)}$ więc

$$\begin{aligned} x_1^{(4)} &= x_1^{(3)} = 0, \\ x_3^{(4)} &= x_2^{(3)} = 0.461538, \\ x_4^{(4)} &= x_3^{(3)} = 0.692308, \\ x_2^{(4)} &= \frac{F_2}{F_3} x_1^{(2)} + \frac{F_1}{F_3} x_4^{(2)} = 0.230769. \end{aligned}$$

- obliczamy

$$\begin{aligned} f_2^{(4)} &= f(x_2^{(3)}) = -0.263678, \\ f_3^{(4)} &= f_2^{(3)} = -0.309809. \end{aligned}$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

piąta iteracja

- obliczamy

$$L_6 = \frac{F_1}{F_2} L_4 = 0.230769,$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

piąta iteracja

- obliczamy

$$L_6 = \frac{F_1}{F_2} L_4 = 0.230769,$$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(4)}$ i $f_3^{(4)}$,
- $f_2^{(4)} > f_3^{(4)}$ więc

$$\begin{aligned}
x_1^{(5)} &= x_2^{(4)} = 0.230769, \\
x_2^{(5)} &= x_3^{(4)} = 0.461538, \\
x_4^{(5)} &= x_4^{(4)} = 0.692308, \\
x_3^{(5)} &= \frac{F_0}{F_2} x_1^{(5)} + \frac{F_1}{F_2} x_4^{(5)} + 0.000001 = \\
&= x_2^{(5)} + 0.000001 = 0.461539
\end{aligned}$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

piąta iteracja

- obliczamy

$$L_6 = \frac{F_1}{F_2} L_4 = 0.230769,$$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(4)}$ i $f_3^{(4)}$,
- $f_2^{(4)} > f_3^{(4)}$ więc

$$\begin{aligned} x_1^{(5)} &= x_2^{(4)} = 0.230769, \\ x_2^{(5)} &= x_3^{(4)} = 0.461538, \\ x_4^{(5)} &= x_4^{(4)} = 0.692308, \\ x_3^{(5)} &= \frac{F_0}{F_2} x_1^{(5)} + \frac{F_1}{F_2} x_4^{(5)} + 0.000001 = \\ &= x_2^{(5)} + 0.000001 = 0.461539 \end{aligned}$$

- obliczamy

$$\begin{aligned} f_2^{(4)} &= f_3^{(4)}) = -0.3098092, \\ f_3^{(5)} &= f(x_3^{(4)}) = -0.3098093. \end{aligned}$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

szósta iteracja

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(5)}$ i $f_3^{(5)}$,
- $f_2^{(5)} > f_3^{(5)}$ więc

$$x_1^{(6)} = x_1^{(5)} = 0.461538,$$
$$x_2^{(6)} = x_3^{(5)} = 0.461539,$$
$$x_4^{(6)} = x_4^{(5)} = 0.692308,$$

Metoda Fibonacci – przykład - rozwiązanie

szósta iteracja

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(5)}$ i $f_3^{(5)}$,
- $f_2^{(5)} > f_3^{(5)}$ więc

$$x_1^{(6)} = x_1^{(5)} = 0.461538,$$
$$x_2^{(6)} = x_3^{(5)} = 0.461539,$$
$$x_4^{(6)} = x_4^{(5)} = 0.692308,$$

- optimum

$$f_2^{(6)} = f_3^{(5)} = -0.3098093,$$

Metoda złotego podziału – złota liczba

W metodzie Fibonacci'ego dla dużych wartości n:

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{F_{n-1}}{F_n} L_1, \\ L_3 &= \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \frac{F_{n-1}}{F_n} L_1 \cong \left(\frac{F_{n-1}}{F_n}\right)^2 L_1 \\ &\dots \\ L_k &\cong \left(\frac{F_{n-1}}{F_n}\right)^{k-1} L_1 \end{aligned}$$

Z definicji liczb ciągu Fibonacci'ego

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$$

Definiując liczę φ następująco

$$\varphi = \lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$$

Metoda złotego podziału - złota liczba cd.

otrzymujemy równanie

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi},$$

którego dodatnim rozwiązaniem jest złota liczba

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618034$$

Odwrotność złotej liczby

$$\Phi = \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618034$$

Zatem dla dużych wartości n i $k \ll n$ w metodzie Fibonacci'ego

$$L_k \cong \Phi^{k-1} L_1$$

Metoda złotego podziału – procedura

Dane:
$[a, b]$ - przedział poszukiwań,
N - liczba iteracji

Metoda złotego podziału – procedura

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a, \qquad x_4^{(1)} = b, \qquad L_1 = b - a,$$

Metoda złotego podziału – procedura

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a, \qquad x_4^{(1)} = b, \qquad L_1 = b - a,$$

- obliczamy:

$$L_2 = \Phi L_1,$$

Metoda złotego podziału – procedura

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a, \qquad x_4^{(1)} = b, \qquad L_1 = b - a,$$

- obliczamy:

$$L_2 = \Phi L_1,$$
$$x_2^{(1)} = x_4^{(1)} - L_2 = \Phi x_1^{(1)} + (1 - \Phi) x_4^{(1)},$$

Metoda złotego podziału – procedura

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a, \qquad x_4^{(1)} = b, \qquad L_1 = b - a,$$

- obliczamy:

$$\begin{aligned} L_2 &= \Phi L_1, \\ x_2^{(1)} &= x_4^{(1)} - L_2 = \Phi x_1^{(1)} + (1-\Phi) x_4^{(1)}, \\ x_3^{(1)} &= x_1^{(1)} + L_2 = (1-\Phi) x_1^{(1)} + \Phi x_4^{(1)}. \end{aligned}$$

Metoda złotego podziału – procedura

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a, \qquad x_4^{(1)} = b, \qquad L_1 = b - a,$$

- obliczamy:

$$\begin{aligned} L_2 &= \Phi L_1, \\ x_2^{(1)} &= x_4^{(1)} - L_2 = \Phi x_1^{(1)} + (1-\Phi)x_4^{(1)}, \\ x_3^{(1)} &= x_1^{(1)} + L_2 = (1-\Phi)x_1^{(1)} + \Phi x_4^{(1)}. \end{aligned}$$

- obliczamy

$$\begin{aligned} f_2^{(1)} &= f(x_2^{(1)}), \\ f_3^{(1)} &= f(x_3^{(1)}), \end{aligned}$$

Metoda złotego podziału – procedura

Procedura.

i-ta iteracja

- obliczamy
$$L_{i+1} = \Phi L_i,$$
- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(i-1)}$ i $f_3^{(i-1)}$,

Metoda złotego podziału – procedura

Procedura.

i-ta iteracja

- obliczamy
$$L_{i+1} = \Phi L_i,$$
- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(i-1)}$ i $f_3^{(i-1)}$,
- jeżeli $f_2^{(i-1)} < f_3^{(i-1)}$ to podstawiamy
$$\begin{aligned}
x_1^{(i)} &= x_1^{(i-1)},\\
x_2^{(i)} &= x_4^{(i)} - L_{i+1} = \Phi x_1^{(i)} + (1-\Phi)x_4^{(i)},\\
x_3^{(i)} &= x_2^{(i-1)},\\
x_4^{(i)} &= x_3^{(i-1)},
\end{aligned}$$
- obliczamy
$$\begin{aligned}
f_2^{(i)} &= f(x_2^{(i)}),\\
f_3^{(i)} &= f_2^{(i-1)},
\end{aligned}$$

Metoda złotego podziału – procedura

Procedura.

i-ta iteracja

- obliczamy
$$L_{i+1} = \Phi L_i,$$
- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(i-1)}$ i $f_3^{(i-1)}$,
- jeżeli $f_2^{(i-1)} > f_3^{(i-1)}$ to podstawiamy
$$\begin{aligned}
x_1^{(i)} &= x_2^{(i-1)},\\
x_2^{(i)} &= x_3^{(i-1)},\\
x_3^{(i)} &= x_1^{(i)} + L_{i+1} = (1-\Phi)x_1^{(i)} + \Phi x_4^{(i)},\\
x_4^{(i)} &= x_4^{(i-1)},
\end{aligned}$$
- obliczamy
$$\begin{aligned}
f_2^{(i)} &= f_3^{(i-1)},\\
f_3^{(i)} &= f(x_3^{(i)}),
\end{aligned}$$

- liczba iteracji zależy od długości ostatniego przedziału niepewności jaki chcemy otrzymać,

Metoda złotego podziału

- liczba iteracji zależy od długości ostatniego przedziału niepewności jaki chcemy otrzymać,
- długość przedziału L_n wynosi $\Phi^n L_1$,

Metoda złotego podziału – przykład

Example (Przykład)

Znaleźć minimum funkcji

$$f(x) = 0.65 - \frac{0.75}{1+x^2} - 0.65\, x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

w przedziale $(0, 3]$ przy użyciu metody złotego podziału dla $n = 6$.

Metoda złotego podziału - przykład - rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a = 0, \qquad x_4^{(1)} = b = 3, \qquad L_1 = b - a = 3,$$

Metoda złotego podziału - przykład - rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a = 0, \qquad x_4^{(1)} = b = 3, \qquad L_1 = b - a = 3,$$

- obliczamy:

$$L_2 = \Phi L_1 = 1.854102,$$

Metoda złotego podziału - przykład - rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a = 0, \qquad x_4^{(1)} = b = 3, \qquad L_1 = b - a = 3,$$

- obliczamy:

$$L_2 = \Phi L_1 = 1.854102,$$
$$x_2^{(1)} = \Phi x_1^{(1)} + (1 - \Phi) x_4^{(1)} = 1.145898,$$

Metoda złotego podziału - przykład - rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a = 0, \qquad x_4^{(1)} = b = 3, \qquad L_1 = b - a = 3,$$

- obliczamy:

$$\begin{aligned} L_2 &= \Phi L_1 = 1.854102, \\ x_2^{(1)} &= \Phi x_1^{(1)} + (1-\Phi) x_4^{(1)} = 1.145898, \\ x_3^{(1)} &= (1-\Phi) x_1^{(1)} + \Phi x_4^{(1)} = 1.854102, \end{aligned}$$

Metoda złotego podziału - przykład - rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a = 0, \qquad x_4^{(1)} = b = 3, \qquad L_1 = b - a = 3,$$

- obliczamy:

$$\begin{aligned} L_2 &= \Phi L_1 = 1.854102, \\ x_2^{(1)} &= \Phi x_1^{(1)} + (1-\Phi) x_4^{(1)} = 1.145898, \\ x_3^{(1)} &= (1-\Phi) x_1^{(1)} + \Phi x_4^{(1)} = 1.854102, \end{aligned}$$

- obliczamy

$$\begin{aligned} f_2^{(1)} &= f(x_2^{(1)}) = -0.208671, \\ f_3^{(1)} &= f(x_3^{(1)}) = -0.115113. \end{aligned}$$

Metoda złotego podziału – przykład - rozwiązanie

druga iteracja

- obliczamy

$$L_3 = \Phi L_2 = 1.145898$$

Metoda złotego podziału – przykład - rozwiązanie

druga iteracja

- obliczamy

$$L_3 = \Phi L_2 = 1.145898$$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(1)}$ i $f_3^{(1)}$,
- $f_2^{(1)} < f_3^{(1)}$ więc

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= x_1^{(1)} = 0, \\
x_3^{(2)} &= x_2^{(1)} = 1.145898, \\
x_4^{(2)} &= x_3^{(1)} = 1.854102, \\
x_2^{(2)} &= \Phi x_1^{(2)} + (1 - \Phi) x_4^{(2)} = 0.708204.
\end{aligned}$$

Metoda złotego podziału – przykład - rozwiązanie

druga iteracja

- obliczamy

$$L_3 = \Phi L_2 = 1.145898$$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(1)}$ i $f_3^{(1)}$,
- $f_2^{(1)} < f_3^{(1)}$ więc

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= x_1^{(1)} = 0,\\
x_3^{(2)} &= x_2^{(1)} = 1.145898,\\
x_4^{(2)} &= x_3^{(1)} = 1.854102,\\
x_2^{(2)} &= \Phi x_1^{(2)} + (1-\Phi)x_4^{(2)} = 0.708204.
\end{aligned}$$

- obliczamy

$$\begin{aligned}
f_2^{(2)} &= f(x_2^{(2)}) = -0.288910,\\
f_3^{(2)} &= f_2^{(1)} = -0.208671.
\end{aligned}$$

Metoda złotego podziału – przykład - rozwiązanie

trzecia iteracja

- obliczamy

$$L_4 = \Phi L_3 = 0.708204,$$

Metoda złotego podziału – przykład - rozwiązanie

trzecia iteracja

- obliczamy

$$L_4 = \Phi L_3 = 0.708204,$$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(2)}$ i $f_3^{(2)}$,
- $f_2^{(2)} < f_3^{(2)}$ więc

$$\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= x_1^{(2)} = 0, \\
x_3^{(3)} &= x_2^{(2)} = 0.708204, \\
x_4^{(3)} &= x_3^{(2)} = 1.145898, \\
x_2^{(3)} &= \Phi x_1^{(3)} + (1 - \Phi) x_4^{(3)} = 0.437694.
\end{aligned}$$

Metoda złotego podziału – przykład - rozwiązanie

trzecia iteracja

- obliczamy

$$L_4 = \Phi L_3 = 0.708204,$$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(2)}$ i $f_3^{(2)}$,
- $f_2^{(2)} < f_3^{(2)}$ więc

$$\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= x_1^{(2)} = 0, \\
x_3^{(3)} &= x_2^{(2)} = 0.708204, \\
x_4^{(3)} &= x_3^{(2)} = 1.145898, \\
x_2^{(3)} &= \Phi x_1^{(3)} + (1 - \Phi) x_4^{(3)} = 0.437694.
\end{aligned}$$

- obliczamy

$$\begin{aligned}
f_2^{(3)} &= f(x_2^{(3)}) = -0.308934, \\
f_3^{(3)} &= f_2^{(2)} = -0.288910.
\end{aligned}$$

Metoda złotego podziału – przykład - rozwiązanie

czwarta iteracja

- obliczamy

$$L_5 = \Phi L_4 = 0.437694,$$

Metoda złotego podziału – przykład - rozwiązanie

czwarta iteracja

- obliczamy

$$L_5 = \Phi L_4 = 0.437694,$$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(3)}$ i $f_3^{(3)}$,
- $f_2^{(3)} < f_3^{(3)}$ więc

$$\begin{aligned} x_1^{(4)} &= x_1^{(3)} = 0, \\ x_3^{(4)} &= x_2^{(3)} = 0.437694, \\ x_4^{(4)} &= x_3^{(3)} = 0.708204, \\ x_2^{(4)} &= \Phi x_1^{(4)} + (1-\Phi)x_4^{(4)} = 0.270510. \end{aligned}$$

Metoda złotego podziału – przykład - rozwiązanie

czwarta iteracja

- obliczamy

$$L_5 = \Phi L_4 = 0.437694,$$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(3)}$ i $f_3^{(3)}$,
- $f_2^{(3)} < f_3^{(3)}$ więc

$$\begin{aligned}
x_1^{(4)} &= x_1^{(3)} = 0,\\
x_3^{(4)} &= x_2^{(3)} = 0.437694,\\
x_4^{(4)} &= x_3^{(3)} = 0.708204,\\
x_2^{(4)} &= \Phi x_1^{(4)} + (1-\Phi)x_4^{(4)} = 0.270510.
\end{aligned}$$

- obliczamy

$$\begin{aligned}
f_2^{(4)} &= f(x_2^{(4)}) = -0.278603,\\
f_3^{(4)} &= f_2^{(3)} = -0.308934.
\end{aligned}$$

Metoda złotego podziału – przykład - rozwiązanie

piąta iteracja

- obliczamy

$$L_6 = \Phi L_4 = 0.270510,$$

Metoda złotego podziału – przykład - rozwiązanie

piąta iteracja

- obliczamy

$$L_6 = \Phi L_4 = 0.270510,$$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(4)}$ i $f_3^{(4)}$,
- $f_2^{(4)} > f_3^{(4)}$ więc

$$x_1^{(5)} = x_2^{(4)} = 0.270510,$$
$$x_2^{(5)} = x_3^{(4)} = 0.437694,$$
$$x_4^{(5)} = x_4^{(4)} = 0.708204,$$
$$x_3^{(5)} = (1-\Phi)x_1^{(5)} + \Phi x_4^{(5)} = 0.541020,$$

Metoda złotego podziału – przykład - rozwiązanie

piąta iteracja

- obliczamy

$$L_6 = \Phi L_4 = 0.270510,$$

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(4)}$ i $f_3^{(4)}$,
- $f_2^{(4)} > f_3^{(4)}$ więc

$$\begin{aligned} x_1^{(5)} &= x_2^{(4)} = 0.270510, \\ x_2^{(5)} &= x_3^{(4)} = 0.437694, \\ x_4^{(5)} &= x_4^{(4)} = 0.708204, \\ x_3^{(5)} &= (1-\Phi)x_1^{(5)} + \Phi x_4^{(5)} = 0.541020, \end{aligned}$$

- obliczamy

$$\begin{aligned} f_2^{(4)} &= f_3^{(4)}) = -0.308934, \\ f_3^{(5)} &= f(x_3^{(4)}) = -0.308173. \end{aligned}$$

Metoda złotego podziału – przykład - rozwiązanie

szósta iteracja

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(5)}$ i $f_3^{(5)}$,
- $f_2^{(5)} < f_3^{(5)}$ więc

$$
\begin{aligned}
x_1^{(6)} &= x_1^{(5)} = 0.270510,\\
x_3^{(6)} &= x_2^{(5)} = 0.437694,\\
x_4^{(6)} &= x_3^{(5)} = 0.541020,
\end{aligned}
$$

Metoda złotego podziału – przykład - rozwiązanie

szósta iteracja

- porównujemy wartości funkcji celu $f_2^{(5)}$ i $f_3^{(5)}$,
- $f_2^{(5)} < f_3^{(5)}$ więc

$$x_1^{(6)} = x_1^{(5)} = 0.270510,$$
$$x_3^{(6)} = x_2^{(5)} = 0.437694,$$
$$x_4^{(6)} = x_3^{(5)} = 0.541020,$$

- optimum

$$f_3^{(6)} = f_2^{(5)} = -0.308934,$$

Metoda interpolacji kwadratowej - wstęp

Metoda interpolcji kwadratowej polega na zastąpieniu funkcji celu $f(x)$ wielomianem drugiego stopnia $p(x)$.
Zakładamy, że znane są wartości funkcji $f(x)$ w punktach $x_1 < x_2 < x_3$ odpowiednio równe f_1, f_2, f_3. Wielomian interpolacyjny Lagrange'a ma postać:

$$p(x) = f_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Warunkiem koniecznym istnienia minimum wielomianu interpolacyjnego jest zerowanie się jego pochodnej, czyli

$$f_1 \frac{2\tilde{x}-(x_2+x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f_2 \frac{2\tilde{x}-(x_1+x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f_3 \frac{2\tilde{x}-(x_1+x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = 0,$$

gdzie $\tilde{x}$ jest punktem stacjonarnym wielomianu $p(x)$ oraz

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} \frac{f_1(x_2^2-x_3^2)+f_2(x_3^2-x_1^2)+f_3(x_1^2-x_2^2)}{f_1(x_2-x_3)+f_2(x_3-x_1)+f_3(x_1-x_2)} \tag{3.1}$$

Metoda interpolacji kwadratowej - wstęp

Druga pochodna wielomianu $p(x)$ wynosi

$$p''(x) = -2\frac{f_1(x_2 - x_3) + f_2(x_3 - x_1) + f_3(x_1 - x_2)}{(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2)}$$

Warunkiem dostatecznym istnienia miniumum jest przyjmowanie wartości dodatniej drugiej pochodnej w punkcie stacjonarnym. Warunek ten jest spełniony, gdy

$$f_2 < \frac{f_1(x_3 - x_2) + f_3(x_2 - x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Warunek ten jest zawsze spełniony, gdy funkcja $f(x)$ jest funkcją wypukłą.

Metoda interpolacji kwadratowej - procedura

Dane:
$f(x)$ - funkcja celu,
$[a, b]$ - przedział poszukiwań,

Metoda interpolacji kwadratowej - procedura

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a, \qquad x_3^{(1)} = b, \qquad x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(a+b),$$

Metoda interpolacji kwadratowej - procedura

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a, \qquad x_3^{(1)} = b, \qquad x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(a+b),$$

- obliczamy:

$$f_k^{(1)} = f(x_k^{(1)}) \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3,$$

Metoda interpolacji kwadratowej - procedura

Pierwsza iteracja

- podstawiamy

$$x_1^{(1)} = a, \qquad x_3^{(1)} = b, \qquad x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(a+b),$$

- obliczamy:

$$f_k^{(1)} = f(x_k^{(1)}) \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3,$$

- obliczamy

$$\tilde{x}^{(1)} \quad \text{wg wzoru (3.3)}$$

oraz

$$\tilde{f}^{(1)} = f(\tilde{x}^{(1)}).$$

Metoda interpolacji kwadratowej - procedura

i-ta iteracja

- porównujemy parami poniższe wartości. Jeżeli

Metoda interpolacji kwadratowej - procedura

i-ta iteracja

- porównujemy parami poniższe wartości. Jeżeli
$$\tilde{x}^{(i-1)} < x_2^{(i-1)},$$
$$\tilde{f}^{(i-1)} < f_2^{(i-1)}$$
- to podstawiamy
$$x_1^{(i)} = x_1^{(i-1)}, \quad f_1^{(i)} = f_1^{(i-1)},$$
$$x_2^{(i)} = \tilde{x}^{(i-1)}, \quad f_2^{(i)} = \tilde{f}^{(i-1)},$$
$$x_3^{(i)} = x_2^{(i-1)}, \quad f_3^{(i)} = f_2^{(i-1)},$$

Metoda interpolacji kwadratowej - procedura

i-ta iteracja

- porównujemy parami poniższe wartości. Jeżeli
$$\tilde{x}^{(i-1)} < x_2^{(i-1)},$$
$$\tilde{f}^{(i-1)} > f_2^{(i-1)}$$
- to podstawiamy

$$\begin{aligned} x_1^{(i)} &= \tilde{x}^{(i-1)}, & f_1^{(i)} &= \tilde{f}^{(i-1)}, \\ x_2^{(i)} &= x_2^{(i-1)}, & f_2^{(i)} &= f_2^{(i-1)}, \\ x_3^{(i)} &= x_3^{(i-1)}, & f_3^{(i)} &= f_3^{(i-1)}, \end{aligned}$$

Metoda interpolacji kwadratowej - procedura

i-ta iteracja

- porównujemy parami poniższe wartości. Jeżeli
$$\tilde{x}^{(i-1)} > x_2^{(i-1)},$$
$$\tilde{f}^{(i-1)} < f_2^{(i-1)}$$
- to podstawiamy

$$\begin{aligned} x_1^{(i)} &= x_2^{(i-1)}, & f_1^{(i)} &= f_2^{(i-1)}, \\ x_2^{(i)} &= \tilde{x}^{(i-1)}, & f_2^{(i)} &= \tilde{f}^{(i-1)}, \\ x_3^{(i)} &= x_3^{(i-1)}, & f_3^{(i)} &= f_3^{(i-1)}, \end{aligned}$$

Metoda interpolacji kwadratowej - procedura

i-ta iteracja

- porównujemy parami poniższe wartości. Jeżeli
$$\tilde{x}^{(i-1)} > x_2^{(i-1)},$$
$$\tilde{f}^{(i-1)} > f_2^{(i-1)}$$
- to podstawiamy

$$\begin{aligned} x_1^{(i)} &= x_1^{(i-1)}, & f_1^{(i)} &= f_1^{(i-1)}, \\ x_2^{(i)} &= x_2^{(i-1)}, & f_2^{(i)} &= f_2^{(i-1)}, \\ x_3^{(i)} &= \tilde{x}^{(i-1)}, & f_3^{(i)} &= \tilde{f}^{(i-1)}, \end{aligned}$$

Metoda interpolacji kwadratowej - procedura

i-ta iteracja

- porównujemy parami poniższe wartości. Jeżeli
$$\tilde{x}^{(i-1)} > x_2^{(i-1)},$$
$$\tilde{f}^{(i-1)} > f_2^{(i-1)}$$
- to podstawiamy
$$\begin{aligned} x_1^{(i)} &= x_1^{(i-1)}, \qquad & f_1^{(i)} &= f_1^{(i-1)}, \\ x_2^{(i)} &= x_2^{(i-1)}, \qquad & f_2^{(i)} &= f_2^{(i-1)}, \\ x_3^{(i)} &= \tilde{x}^{(i-1)}, \qquad & f_3^{(i)} &= \tilde{f}^{(i-1)}, \end{aligned}$$
- obliczamy
$$\tilde{x}^{(i)} \quad \text{wg wzoru (3.3)}$$
oraz
$$\tilde{f}^{(i)} = f(\tilde{x}^{(i)}).$$

Metoda interpolacji kwadratowej – przykład

Example (Przykład)

Znaleźć minimum funkcji

$$f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5$$

w przedziale $(0, 3]$.

Metoda interpolacji kwadratowej – przykład - rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- podstawiamy i obliczamy

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= 0.000000, & f_1^{(1)} &= f(x_1^{(1)}) = 5.00000,\\
x_2^{(1)} &= 1.500000, & f_2^{(1)} &= f(x_2^{(1)}) = -34.28125,\\
x_3^{(1)} &= 3.000000, & f_3^{(1)} &= f(x_3^{(1)}) = 53.00000,
\end{aligned}
$$

Metoda interpolacji kwadratowej – przykład - rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- podstawiamy i obliczamy

$$x_1^{(1)} = 0.000000, \quad f_1^{(1)} = f(x_1^{(1)}) = 5.00000,$$
$$x_2^{(1)} = 1.500000, \quad f_2^{(1)} = f(x_2^{(1)}) = -34.28125,$$
$$x_3^{(1)} = 3.000000, \quad f_3^{(1)} = f(x_3^{(1)}) = 53.00000,$$

- obliczamy

$$\tilde{x}^{(1)} = 1.215556, \quad \tilde{f}^{(1)} = f(\tilde{x}^{(1)}) = -25.63765$$

oraz

$$p(\tilde{x}^{(1)}) = -36.556806,$$

Metoda interpolacji kwadratowej – przykład - rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- podstawiamy i obliczamy

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= 0.000000, \quad & f_1^{(1)} &= f(x_1^{(1)}) = 5.00000,\\
x_2^{(1)} &= 1.500000, \quad & f_2^{(1)} &= f(x_2^{(1)}) = -34.28125,\\
x_3^{(1)} &= 3.000000, \quad & f_3^{(1)} &= f(x_3^{(1)}) = 53.00000,
\end{aligned}
$$

- obliczamy

$$\tilde{x}^{(1)} = 1.215556, \quad \tilde{f}^{(1)} = f(\tilde{x}^{(1)}) = -25.63765$$

oraz

$$p(\tilde{x}^{(1)}) = -36.556806,$$

- błąd wynosi

$$\left| \frac{p(\tilde{x}^{(1)}) - \tilde{f}^{(1)}}{\tilde{f}^{(1)}} \right| = 0.425903$$

oraz

$$\left| x_3^{(1)} - x_1^{(1)} \right| = |3 - 0| = 3$$

Metoda interpolacji kwadratowej – przykład - rozwiązanie

Druga iteracja

- ponieważ $\tilde{x}^{(1)} < x_2^{(1)}$ oraz $\tilde{f}^{(1)} > f_2^{(1)}$ to

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \tilde{x}^{(1)} = 1.215556, & f_1^{(2)} &= \tilde{f}^{(1)} = -25.63765,\\
x_2^{(2)} &= x_2^{(1)} = 1.500000, & f_2^{(2)} &= f_2^{(1)} = -34.28125,\\
x_3^{(2)} &= x_3^{(1)} = 3.000000, & f_3^{(2)} &= f_3^{(1)} = 53.00000,
\end{aligned}
$$

Metoda interpolacji kwadratowej – przykład - rozwiązanie

Druga iteracja

- ponieważ $\tilde{x}^{(1)} < x_2^{(1)}$ oraz $\tilde{f}^{(1)} > f_2^{(1)}$ to

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \tilde{x}^{(1)} = 1.215556, \quad & f_1^{(2)} &= \tilde{f}^{(1)} = -25.63765,\\
x_2^{(2)} &= x_2^{(1)} = 1.500000, \quad & f_2^{(2)} &= f_2^{(1)} = -34.28125,\\
x_3^{(2)} &= x_3^{(1)} = 3.000000, \quad & f_3^{(2)} &= f_3^{(1)} = 53.00000,
\end{aligned}$$

- obliczamy

$$\tilde{x}^{(2)} = 1.663874, \quad \tilde{f}^{(2)} = f(\tilde{x}^{(2)}) = -38.55677$$

oraz

$$p(\tilde{x}^{(2)}) = -35.61425,$$

Metoda interpolacji kwadratowej – przykład - rozwiązanie

Druga iteracja

- ponieważ $\tilde{x}^{(1)} < x_2^{(1)}$ oraz $\tilde{f}^{(1)} > f_2^{(1)}$ to

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \tilde{x}^{(1)} = 1.215556, & f_1^{(2)} &= \tilde{f}^{(1)} = -25.63765, \\ x_2^{(2)} &= x_2^{(1)} = 1.500000, & f_2^{(2)} &= f_2^{(1)} = -34.28125, \\ x_3^{(2)} &= x_3^{(1)} = 3.000000, & f_3^{(2)} &= f_3^{(1)} = 53.00000, \end{aligned}$$

- obliczamy

$$\tilde{x}^{(2)} = 1.663874, \quad \tilde{f}^{(2)} = f(\tilde{x}^{(2)}) = -38.55677$$

oraz

$$p(\tilde{x}^{(2)}) = -35.61425,$$

- błąd wynosi

$$\left| \frac{p(\tilde{x}^{(2)}) - \tilde{f}^{(2)}}{\tilde{f}^{(2)}} \right| = 0.076316$$

oraz

$$\left| x_3^{(2)} - x_1^{(2)} \right| = |3 - 1.215556| = 1.784444$$

Metoda interpolacji kwadratowej – przykład - rozwiązanie

Trzecia iteracja

- ponieważ $\tilde{x}^{(2)} > x_2^{(2)}$ oraz $\tilde{f}^{(2)} < f_2^{(2)}$ to

$$
\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= x_2^{(2)} = 1.500000, & f_1^{(3)} &= f_2^{(2)} = -34.28125,\\
x_2^{(3)} &= \tilde{x}^{(2)} = 1.663874, & f_2^{(3)} &= \tilde{f}^{(2)} = -38.55677,\\
x_3^{(3)} &= x_3^{(2)} = 3.000000, & f_3^{(3)} &= f_3^{(2)} = 53.00000,
\end{aligned}
$$

Metoda interpolacji kwadratowej – przykład - rozwiązanie

Trzecia iteracja

- ponieważ $\tilde{x}^{(2)} > x_2^{(2)}$ oraz $\tilde{f}^{(2)} < f_2^{(2)}$ to

$$
\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= x_2^{(2)} = 1.500000, \quad & f_1^{(3)} &= f_2^{(2)} = -34.28125,\\
x_2^{(3)} &= \tilde{x}^{(2)} = 1.663874, \quad & f_2^{(3)} &= \tilde{f}^{(2)} = -38.55677,\\
x_3^{(3)} &= x_3^{(2)} = 3.000000, \quad & f_3^{(3)} &= f_3^{(2)} = 53.00000,
\end{aligned}
$$

- obliczamy

$$\tilde{x}^{(3)} = 1.788752, \quad \tilde{f}^{(3)} = f(\tilde{x}^{(3)}) = -41.07917$$

oraz

$$p(\tilde{x}^{(2)}) = -39.54041,$$

Metoda interpolacji kwadratowej – przykład - rozwiązanie

Trzecia iteracja

- ponieważ $\tilde{x}^{(2)} > x_2^{(2)}$ oraz $\tilde{f}^{(2)} < f_2^{(2)}$ to

$$
\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= x_2^{(2)} = 1.500000, & f_1^{(3)} &= f_2^{(2)} = -34.28125,\\
x_2^{(3)} &= \tilde{x}^{(2)} = 1.663874, & f_2^{(3)} &= \tilde{f}^{(2)} = -38.55677,\\
x_3^{(3)} &= x_3^{(2)} = 3.000000, & f_3^{(3)} &= f_3^{(2)} = 53.00000,
\end{aligned}
$$

- obliczamy

$$\tilde{x}^{(3)} = 1.788752, \quad \tilde{f}^{(3)} = f(\tilde{x}^{(3)}) = -41.07917$$

oraz

$$p(\tilde{x}^{(2)}) = -39.54041,$$

- błąd wynosi

$$\left| \frac{p(\tilde{x}^{(3)}) - \tilde{f}^{(3)}}{\tilde{f}^{(3)}} \right| = 0.037458$$

oraz

$$\left| x_3^{(3)} - x_1^{(3)} \right| = |3 - 1.5| = 1.5$$

Metoda interpolacji kwadratowej – przykład - rozwiązanie

Czwarta iteracja

- ponieważ $\tilde{x}^{(3)} > x_2^{(3)}$ oraz $\tilde{f}^{(3)} < f_2^{(3)}$ to

$$
\begin{aligned}
x_1^{(4)} &= x_2^{(3)} = 1.663874, & f_1^{(4)} &= f_2^{(3)} = -38.55677,\\
x_2^{(4)} &= \tilde{x}^{(3)} = 1.788752, & f_2^{(4)} &= \tilde{f}^{(3)} = -41.07917,\\
x_3^{(4)} &= x_3^{(3)} = 3.000000, & f_3^{(4)} &= f_3^{(3)} = 53.00000,
\end{aligned}
$$

Metoda interpolacji kwadratowej – przykład - rozwiązanie

Czwarta iteracja

- ponieważ $\tilde{x}^{(3)} > x_2^{(3)}$ oraz $\tilde{f}^{(3)} < f_2^{(3)}$ to

$$
\begin{aligned}
x_1^{(4)} &= x_2^{(3)} = 1.663874, \quad & f_1^{(4)} &= f_2^{(3)} = -38.55677,\\
x_2^{(4)} &= \tilde{x}^{(3)} = 1.788752, \quad & f_2^{(4)} &= \tilde{f}^{(3)} = -41.07917,\\
x_3^{(4)} &= x_3^{(3)} = 3.000000, \quad & f_3^{(4)} &= f_3^{(3)} = 53.00000,
\end{aligned}
$$

- obliczamy

$$\tilde{x}^{(4)} = 1.864191, \quad \tilde{f}^{(4)} = f(\tilde{x}^{(4)}) = -42.16212$$

oraz

$$p(\tilde{x}^{(4)}) = -41.49604,$$

Metoda interpolacji kwadratowej – przykład - rozwiązanie

Czwarta iteracja

- ponieważ $\tilde{x}^{(3)} > x_2^{(3)}$ oraz $\tilde{f}^{(3)} < f_2^{(3)}$ to

$$x_1^{(4)} = x_2^{(3)} = 1.663874, \quad f_1^{(4)} = f_2^{(3)} = -38.55677,$$
$$x_2^{(4)} = \tilde{x}^{(3)} = 1.788752, \quad f_2^{(4)} = \tilde{f}^{(3)} = -41.07917,$$
$$x_3^{(4)} = x_3^{(3)} = 3.000000, \quad f_3^{(4)} = f_3^{(3)} = 53.00000,$$

- obliczamy

$$\tilde{x}^{(4)} = 1.864191, \quad \tilde{f}^{(4)} = f(\tilde{x}^{(4)}) = -42.16212$$

oraz

$$p(\tilde{x}^{(4)}) = -41.49604,$$

- błąd wynosi

$$\left| \frac{p(\tilde{x}^{(4)}) - \tilde{f}^{(4)}}{\tilde{f}^{(4)}} \right| = 0.015798$$

oraz

$$\left| x_3^{(4)} - x_1^{(4)} \right| = |3 - 1.663874| = 1.336126$$

Metoda interpolacji kwadratowej – przykład - rozwiązanie

Piąta iteracja

- ponieważ $\tilde{x}^{(4)} > x_2^{(4)}$ oraz $\tilde{f}^{(4)} < f_2^{(4)}$ to

$$\begin{aligned}
x_1^{(5)} &= x_2^{(4)} = 1.788752, \quad & f_1^{(5)} &= f_2^{(4)} = -41.07917,\\
x_2^{(5)} &= \tilde{x}^{(4)} = 1.864191, \quad & f_2^{(5)} &= \tilde{f}^{(4)} = -42.16212,\\
x_3^{(5)} &= x_3^{(4)} = 3.000000, \quad & f_3^{(5)} &= f_3^{(4)} = 53.00000,
\end{aligned}$$

Piąta iteracja

- ponieważ $\tilde{x}^{(4)} > x_2^{(4)}$ oraz $\tilde{f}^{(4)} < f_2^{(4)}$ to

$$x_1^{(5)} = x_2^{(4)} = 1.788752, \quad f_1^{(5)} = f_2^{(4)} = -41.07917,$$
$$x_2^{(5)} = \tilde{x}^{(4)} = 1.864191, \quad f_2^{(5)} = \tilde{f}^{(4)} = -42.16212,$$
$$x_3^{(5)} = x_3^{(4)} = 3.000000, \quad f_3^{(5)} = f_3^{(4)} = 53.00000,$$

- obliczamy

$$\tilde{x}^{(5)} = 1.915059, \quad \tilde{f}^{(5)} = f(\tilde{x}^{(5)}) = -42.66019$$

oraz

$$p(\tilde{x}^{(5)}) = -42.37176,$$

Metoda interpolacji kwadratowej – przykład - rozwiązanie

Piąta iteracja

- ponieważ $\tilde{x}^{(4)} > x_2^{(4)}$ oraz $\tilde{f}^{(4)} < f_2^{(4)}$ to

$$
\begin{aligned}
x_1^{(5)} &= x_2^{(4)} = 1.788752, & f_1^{(5)} &= f_2^{(4)} = -41.07917,\\
x_2^{(5)} &= \tilde{x}^{(4)} = 1.864191, & f_2^{(5)} &= \tilde{f}^{(4)} = -42.16212,\\
x_3^{(5)} &= x_3^{(4)} = 3.000000, & f_3^{(5)} &= f_3^{(4)} = 53.00000,
\end{aligned}
$$

- obliczamy

$$\tilde{x}^{(5)} = 1.915059, \quad \tilde{f}^{(5)} = f(\tilde{x}^{(5)}) = -42.66019$$

oraz

$$p(\tilde{x}^{(5)}) = -42.37176,$$

- błąd wynosi

$$\left| \frac{p(\tilde{x}^{(5)}) - \tilde{f}^{(5)}}{\tilde{f}^{(5)}} \right| = 0.006761$$

oraz

$$\left| x_3^{(2)} - x_1^{(2)} \right| = |3 - 1.788752| = 1.211248$$

Metoda interpolacji sześciennej - wstęp

Metoda interpolcji sześciennej polega na zastąpieniu funkcji celu $f(x)$ wielomianem trzeciego stopnia $p(x)$.
Zakładamy, że znane są wartości funkcji $f(x)$ i pochodnej funkcji $f'(x)$ w punktach $x_1 < x_2$ odpowiednio równe f_1, f_2, f'_1, f'_2. Wielomian interpolacyjny ma postać:

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Współczynniki a_i wielomianu interpolacyjnego $p(x)$ obliczamy z układu równań

$$\begin{aligned}
a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 &= f_1, \\
a_3x_2^3 + a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 &= f_2, \\
3a_3x_1^2 + 2a_2x_1 + a_1 &= f'_1, \\
3a_3x_2^2 + 2a_2x_2 + a_1 &= f'_2.
\end{aligned}$$

Warunkiem koniecznym istnienia minimum wielomianu interpolacyjnego jest zerowanie się jego pochodnej. Punkt stacjonarny oblicza się

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= x_2 - k, \\
k &= (x_2 - x_1)\frac{f'_2 + w - z}{f'_2 - f'_1 + 2w} \\
w &= \sqrt{z^2 - f'_1 f'_2}, \\
z &= f'_1 + f'_2 - 3\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}
\end{aligned}$$

Metoda Newtona-Raphsona – wstęp

Metoda Newtona-Raphsona polega na zastąpieniu funkcji celu $f(x)$ wielomianem drugiego stopnia stopnia $p(x)$.
Zakładamy, że w punkcie x_1 znana jest wartość funkcji $f(x)$, wartość pierwszej pochodnej funkcji $f'(x)$ oraz drugiej pochodnej funkcji $f''(x)$.
Korzystamy z wzoru Taylora

$$p(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{1}{2} f''(x_1)(x - x_1)^2.$$

Warunkiem koniecznym istnienia minimum wielomianu interpolacyjnego jest zerowanie się jego pochodnej, czyli

$$f'(x_1) + f''(x_1)(\tilde{x} - x_1) = 0,$$

gdzie $\tilde{x}$ jest punktem stacjonarnym wielomianu $p(x)$ oraz

$$\tilde{x} = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} \tag{3.2}$$

dla $f''(x_1) \neq 0$.

Metoda Newtona-Raphsona – procedura

Pierwsza iteracja

- Obliczamy

$$f_1' = f'(x_1),$$
$$f_1'' = f''(x_1),$$

Metoda Newtona-Raphsona – procedura

Pierwsza iteracja

- Obliczamy

$$f_1' = f'(x_1),$$
$$f_1'' = f''(x_1),$$

Metoda Newtona-Raphsona – procedura

Pierwsza iteracja

- Obliczamy

$$f_1' = f'(x_1),$$
$$f_1'' = f''(x_1),$$

- jeśli

$$\left| f'(x_1) \right| < \varepsilon$$

  to

$$x^* = x_1,$$
$$f^* = f(x_1).$$

Metoda Newtona-Raphsona – procedura

i-ta iteracja

- Obliczamy

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f'_{i-1}}{f''_{i-1}}.$$

dla $f''(x_{i-1}) \neq 0$.

Metoda Newtona-Raphsona – procedura

i-ta iteracja

- Obliczamy

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f'_{i-1}}{f''_{i-1}}.$$

dla $f''(x_{i-1}) \neq 0$.

- obliczamy:

$$f'_i = f'(x_i),$$
$$f''_i = f''(x_i),$$

Metoda Newtona-Raphsona – procedura

i-ta iteracja

- Obliczamy
$$x_i = x_{i-1} - \frac{f'_{i-1}}{f''_{i-1}}.$$
dla $f''(x_{i-1}) \neq 0$.
- obliczamy:
$$f'_i = f'(x_i),$$
$$f''_i = f''(x_i),$$
- jeśli
$$\left| f'(x_i) \right| < \varepsilon$$
to
$$x^* = x_i,$$
$$f^* = f(x_i).$$

Metoda Newtona-Raphsona – przykład

Example (Przykład)

Znaleźć minimum funkcji

$$f(x) = 0.65 - \frac{0.75}{1+x^2} - 0.65\,x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

za pomocą metody Newtona-Raphsona dla $x_1 = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$.

Metoda Newtona-Raphsona – procedura

Pierwsza iteracja

- Obliczamy

$$
\begin{aligned}
f_1 &= f(x_1) = -0.188198, \\
f_1' &= f'(x_1) = -0.744832, \\
f_1'' &= f''(x_1) = 2.686594,
\end{aligned}
$$

Metoda Newtona-Raphsona – procedura

Pierwsza iteracja

- Obliczamy

$$\begin{aligned} f_1 &= f(x_1) = -0.188198, \\ f_1' &= f'(x_1) = -0.744832, \\ f_1'' &= f''(x_1) = 2.686594, \end{aligned}$$

Metoda Newtona-Raphsona – procedura

Pierwsza iteracja

- Obliczamy

$$\begin{aligned} f_1 &= f(x_1) = -0.188198, \\ f_1' &= f'(x_1) = -0.744832, \\ f_1'' &= f''(x_1) = 2.686594, \end{aligned}$$

- $$\left| f'(x_1) \right| = 0.744832 > 0.01 = \varepsilon.$$

Metoda Newtona-Raphsona – procedura

Druga iteracja

- Obliczamy

$$x_2 = x_1 - \frac{f_1'}{f_1''} = 0.377240$$

Druga iteracja

- Obliczamy

$$x_2 = x_1 - \frac{f_1'}{f_1''} = 0.377240$$

- obliczamy

$$\begin{aligned} f_2 &= f(x_2) = -0.303279, \\ f_2' &= f'(x_2) = -0.138231, \\ f_2'' &= f''(x_2) = 1.572960, \end{aligned}$$

Metoda Newtona-Raphsona – procedura

Druga iteracja

- Obliczamy

$$x_2 = x_1 - \frac{f_1'}{f_1''} = 0.377240$$

- obliczamy

$$\begin{aligned} f_2 &= f(x_2) = -0.303279, \\ f_2' &= f'(x_2) = -0.138231, \\ f_2'' &= f''(x_2) = 1.572960, \end{aligned}$$

- $$\left| f'(x_2) \right| = 0.138231 > 0.01 = \varepsilon.$$

Metoda Newtona-Raphsona – procedura

Trzecia iteracja

- Obliczamy

$$x_3 = x_2 - \frac{f_2'}{f_2''} = 0.465120$$

Metoda Newtona-Raphsona – procedura

Trzecia iteracja

- Obliczamy

$$x_3 = x_2 - \frac{f_2'}{f_2''} = 0.465120$$

- obliczamy

$$\begin{aligned} f_3 &= f(x_3) = -0.309881, \\ f_3' &= f'(x_3) = -0.017907, \\ f_3'' &= f''(x_3) = 1.171258, \end{aligned}$$

Trzecia iteracja

- Obliczamy

$$x_3 = x_2 - \frac{f_2'}{f_2''} = 0.465120$$

- obliczamy

$$\begin{aligned} f_3 &= f(x_3) = -0.309881, \\ f_3' &= f'(x_3) = -0.017907, \\ f_3'' &= f''(x_3) = 1.171258, \end{aligned}$$

- $$\left| f'(x_3) \right| = 0.017907 > 0.01 = \varepsilon.$$

Metoda Newtona-Raphsona – procedura

Czwarta iteracja

- Obliczamy

$$x_4 = x_3 - \frac{f'_3}{f''_3} = 0.480409$$

Metoda Newtona-Raphsona – procedura

Czwarta iteracja

- Obliczamy

$$x_4 = x_3 - \frac{f_3'}{f_3''} = 0.480409$$

- obliczamy

$$\begin{aligned} f_4 &= f(x_4) = -0.310020, \\ f_4' &= f'(x_4) = -0.000503, \\ f_4'' &= f''(x_4) = 1.105659, \end{aligned}$$

Metoda Newtona-Raphsona – procedura

Czwarta iteracja

- Obliczamy

$$x_4 = x_3 - \frac{f_3'}{f_3''} = 0.480409$$

- obliczamy

$$\begin{aligned} f_4 &= f(x_4) = -0.310020, \\ f_4' &= f'(x_4) = -0.000503, \\ f_4'' &= f''(x_4) = 1.105659, \end{aligned}$$

- $$\left| f'(x_4) \right| = 0.000503 < 0.01 = \varepsilon.$$

  Zatem

$$\begin{aligned} x^* &= x_4 = 0.480409, \\ f^* &= f_4 = -0.310020. \end{aligned}$$

Metoda siecznych – wstęp

Metoda siecznych polega na zastąpieniu funkcji celu $f(x)$ wielomianem drugiego stopnia stopnia $p(x)$.

Zakładamy, że w punktach x_L i x_U $(x_L < x_U)$ znane są wartości funkcji $f(x)$ oraz wartości pierwszej pochodnej funkcji $f'(x)$, takie, że $ofn'(x_L) < 0$ i $ofn'(x_U) > 0$. Korzystamy z wzoru Taylora aproksymując drugą pochodną funkcji wzorem

$$f''(x_L) = \frac{f'(x_U) - f'(x_L)}{x_U - x_L}$$

czyli

$$p(x) = f(x_L) + f'(x_L)(x - x_L) + \frac{1}{2}\frac{f'(x_U) - f'(x_L)}{x_U - x_L}(x - x_L)^2.$$

Metoda siecznych – wstęp

Warunkiem koniecznym istnienia minimum wielomianu interpolacyjnego jest zerowanie się jego pochodnej, czyli

$$f'(x_L) + \frac{f'(x_U) - f'(x_L)}{x_U - x_L}(x - x_L) = 0,$$

gdzie $\tilde{x}$ jest punktem stacjonarnym wielomianu $p(x)$ oraz

$$\tilde{x} = x_L - \frac{f'(x_L)}{f'(x_U) - f'(x_L)}(x_U - x_L). \tag{3.3}$$

Uwaga

Jeżeli ma zachodzić warunek

$$x_1 < \tilde{x} < x_2$$

to

$$f'(x_1)f'(x_2) < 0.$$

Metoda siecznych – wstęp

Uwagi

Dla punktów x_L i x_U, takich, że $x_L < x_U$ warunek

- $f'(x_L) \cdot f'(x_U) < 0$ gwarantuje, że punkt stacjonarny wielomianu $p(x)$ należy do przedziału $[x_L, x_U]$, przy czym jeśli
  - $f'(x_L) < 0$ i $f'(x_U) > 0$ to $p(\tilde{x})$ jest minimum wielomianu interpolacyjnego,
  - $f'(x_L) > 0$ i $f'(x_U) < 0$ to $p(\tilde{x})$ jest maksimum wielomianu interpolacyjnego,
- $f'(x_L) \cdot f'(x_U) > 0$ i $f'(x_U) - f'(x_L) \neq 0$ gwarantuje, że punkt stacjonarny wielomianu $p(x)$ nie należy do przedziału $[x_L, x_U]$, przy czym jeśli
  - $f'(x_L) < 0$ i $f'(x_U) < 0$ i $\tilde{x} < x_L$ to $p(\tilde{x})$ jest maksimum wielomianu interpolacyjnego,
  - $f'(x_L) < 0$ i $f'(x_U) < 0$ i $\tilde{x} > x_U$ to $p(\tilde{x})$ jest minimum wielomianu interpolacyjnego,
  - $f'(x_L) > 0$ i $f'(x_U) > 0$ i $\tilde{x} < x_L$ to $p(\tilde{x})$ jest minimum wielomianu interpolacyjnego,
  - $f'(x_L) > 0$ i $f'(x_U) > 0$ i $\tilde{x} > x_U$ to $p(\tilde{x})$ jest maksimum wielomianu interpolacyjnego,
- $f'(x_L) \cdot f'(x_U) > 0$ i $f'(x_U) - f'(x_L) \neq 0$ to wielomian interpolacyjny $p(x)$ jest funkcją liniową.

Metoda siecznych – procedura

Inicjalizacja

- dane są punkty, takie, że

$$f_L^{\prime(1)} = f'(x_L^{(1)}) < 0,$$
$$f_U^{\prime(1)} = f'(x_U^{(1)}) > 0,$$

Metoda siecznych – procedura

Inicjalizacja

- dane są punkty, takie, że

$$f_L^{\prime(1)} = f'(x_L^{(1)}) < 0,$$
$$f_U^{\prime(1)} = f'(x_U^{(1)}) > 0,$$

- jeśli

$$\left| f_L^{\prime(1)} \right| < \varepsilon$$

  to

$$x^* = x_L^{(1)},$$
$$f^* = f_L^{\prime(1)},$$

Metoda siecznych – procedura

Inicjalizacja

- dane są punkty, takie, że

$$f_L^{\prime(1)} = f'(x_L^{(1)}) < 0,$$
$$f_U^{\prime(1)} = f'(x_U^{(1)}) > 0,$$

- jeśli
$$\left| f_L^{\prime(1)} \right| < \varepsilon$$
  to
$$x^* = x_L^{(1)},$$
$$f^* = f_L^{\prime(1)},$$

- jeśli
$$\left| f_U^{\prime(1)} \right| < \varepsilon$$
  to
$$x^* = x_U^{(1)},$$
$$f^* = f_U^{\prime(1)}.$$

Metoda siecznych – procedura

i-ta iteracja

- obliczamy

$$\tilde{x}^{(i)} = x_L^{(i)} - \frac{f_L^{'(i)}}{f_U^{'(i)} - f_L^{'(i)}} \left(x_U^{(i)} - x_L^{(i)} \right),$$

$$\tilde{f}^{'(i)} = f'(\tilde{x}^{(i)})$$

Metoda siecznych – procedura

i-ta iteracja

- obliczamy

$$\tilde{x}^{(i)} = x_L^{(i)} - \frac{f_L^{\prime\,(i)}}{f_U^{\prime\,(i)} - f_L^{\prime\,(i)}} \left(x_U^{(i)} - x_L^{(i)} \right),$$

$$\tilde{f}^{\prime\,(i)} = f'(\tilde{x}^{(i)})$$

- jeśli

$$\left| \tilde{f}^{\prime\,(i)} \right| < \varepsilon$$

  to

$$x^* = \tilde{x}^{(i)},$$

$$f^* = \tilde{f}^{\prime\,(i)}.$$

Metoda siecznych – procedura

i-ta iteracja

- obliczamy

$$\tilde{x}^{(i)} = x_L^{(i)} - \frac{f_L^{\prime\,(i)}}{f_U^{\prime\,(i)} - f_L^{\prime\,(i)}} \left(x_U^{(i)} - x_L^{(i)} \right),$$

$$\tilde{f}^{\prime\,(i)} = f'(\tilde{x}^{(i)})$$

- jeśli

$$\left| \tilde{f}^{\prime\,(i)} \right| < \varepsilon$$

  to

$$x^* = \tilde{x}^{(i)},$$

$$f^* = \tilde{f}^{\prime\,(i)}.$$

- w przeciwnym przypadku, jeśli $\tilde{f}^{\prime\,(i)} > 0$ to

$$x_L^{(i+1)} = x_L^{(i)}, \qquad f_L^{\prime\,(i+1)} = f_L^{\prime\,(i)},$$

$$x_U^{(i+1)} = \tilde{x}^{(i)}, \qquad f_U^{\prime\,(i+1)} = \tilde{f}^{\prime\,(i)}.$$

i-ta iteracja

- obliczamy

$$\tilde{x}^{(i)} = x_L^{(i)} - \frac{f_L^{\prime(i)}}{f_U^{\prime(i)} - f_L^{\prime(i)}} \left(x_U^{(i)} - x_L^{(i)} \right),$$

$$\tilde{f}^{\prime(i)} = f^{\prime}(\tilde{x}^{(i)})$$

- jeśli

$$\left| \tilde{f}^{\prime(i)} \right| < \varepsilon$$

  to

$$x^* = \tilde{x}^{(i)},$$

$$f^* = \tilde{f}^{\prime(i)}.$$

- w przeciwnym przypadku, jeśli $\tilde{f}^{\prime(i)} < 0$ to

$$x_L^{(i+1)} = \tilde{x}^{(i)}, \qquad f_L^{\prime(i+1)} = \tilde{f}^{\prime(i)},$$

$$x_U^{(i+1)} = x_U^{(i)}, \qquad f_U^{\prime(i+1)} = f_U^{\prime(i)}.$$

Metoda siecznych – przykład

Example (Przykład)

Znaleźć minimum funkcji

$$f(x) = 0.65 - \frac{0.75}{1+x^2} - 0.65\, x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

za pomocą metody siecznych dla $x_L = 0.4$, $x_U = 0.8$ i $\varepsilon = 0.01$.

Metoda siecznych – przykład – rozwiązanie

Inicjalizacja

- dane są punkty, takie, że

$$f_L^{\prime(1)} = f'(0.4) = -0.103653 < 0,$$
$$f_U^{\prime(1)} = f'(0.8) = 0.180800 > 0,$$

Metoda siecznych – przykład – rozwiązanie

Inicjalizacja

- dane są punkty, takie, że
$$f_L^{\prime(1)} = f'(0.4) = -0.103653 < 0,$$
$$f_U^{\prime(1)} = f'(0.8) = 0.180800 > 0,$$
- $$\left| f_L^{\prime(1)} \right| > 0.01 = \varepsilon$$

Metoda siecznych – przykład – rozwiązanie

Inicjalizacja

- dane są punkty, takie, że

$$f_L^{\prime(1)} = f'(0.4) = -0.103653 < 0,$$
$$f_U^{\prime(1)} = f'(0.8) = 0.180800 > 0,$$

- $$\left|f_L^{\prime(1)}\right| > 0.01 = \varepsilon$$

- $$\left|f_U^{\prime(1)}\right| > 0.01 = \varepsilon$$

Metoda siecznych – przykład – rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- $$\tilde{x}^{(1)} = 0.545757,$$
  $$\tilde{f}'^{(1)} = f'(\tilde{x}^{(1)}) = 0.063045,$$

Metoda siecznych – przykład – rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- $$\tilde{x}^{(1)} = 0.545757,$$
  $$\tilde{f}'^{(1)} = f'(\tilde{x}^{(1)}) = 0.063045,$$
- $$\left|\tilde{f}'^{(1)}\right| > 0.01 = \varepsilon,$$

Metoda siecznych – przykład – rozwiązanie

Pierwsza iteracja

- $$\tilde{x}^{(1)} = 0.545757,$$
  $$\tilde{f}'^{(1)} = f'(\tilde{x}^{(1)}) = 0.063045,$$
- $$\left|\tilde{f}'^{(1)}\right| > 0.01 = \varepsilon,$$
- $\tilde{f}'^{(1)} > 0$, więc

$$x_L^{(2)} = x_L^{(1)} = 0.4, \qquad f_L'^{(2)} = f_L'^{(1)} = -0.103653,$$
$$x_U^{(2)} = \tilde{x}^{(1)} = 0.545757, \qquad f_U'^{(2)} = \tilde{f}'^{(1)} = 0.063045.$$

Metoda siecznych – przykład – rozwiązanie

Druga iteracja

- $$\begin{aligned} \tilde{x}^{(2)} &= 0.490632, \\ \tilde{f}'^{(2)} &= f'(\tilde{x}^{(1)}) = 0.010580, \end{aligned}$$

Metoda siecznych – przykład – rozwiązanie

Druga iteracja

- $$\tilde{x}^{(2)} = 0.490632,$$
  $$\tilde{f}'^{(2)} = f'(\tilde{x}^{(1)}) = 0.010580,$$

- $$\left|\tilde{f}'^{(2)}\right| > 0.01 = \varepsilon,$$

Metoda siecznych – przykład – rozwiązanie

Druga iteracja

- $$\tilde{x}^{(2)} = 0.490632,$$
  $$\tilde{f}'^{(2)} = f'(\tilde{x}^{(1)}) = 0.010580,$$
- $$\left|\tilde{f}'^{(2)}\right| > 0.01 = \varepsilon,$$
- $\tilde{f}'^{(2)} > 0$, więc

$$x_L^{(3)} = x_L^{(2)} = 0.4, \qquad f_L'^{(3)} = f_L'^{(2)} = -0.103653,$$
$$x_U^{(3)} = \tilde{x}^{(2)} = 0.490632, \quad f_U'^{(3)} = \tilde{f}'^{(2)} = 0.010580.$$

Metoda siecznych – przykład – rozwiązanie

Trzecia iteracja

- $$\tilde{x}^{(3)} = 0.482238,$$
  $$\tilde{f}'^{(3)} = f'(\tilde{x}^{(1)}) = 0.001512,$$

Metoda siecznych – przykład – rozwiązanie

Trzecia iteracja

- $$\tilde{x}^{(3)} = 0.482238,$$
  $$\tilde{f}'^{(3)} = f'(\tilde{x}^{(1)}) = 0.001512,$$
- $$\left|\tilde{f}'^{(3)}\right| < 0.01 = \varepsilon,$$
  więc
  $$x^* = \tilde{x}^{(3)} = 0.482238,$$
  $$f^* = \tilde{f}^{(3)} = -0.310019.$$