



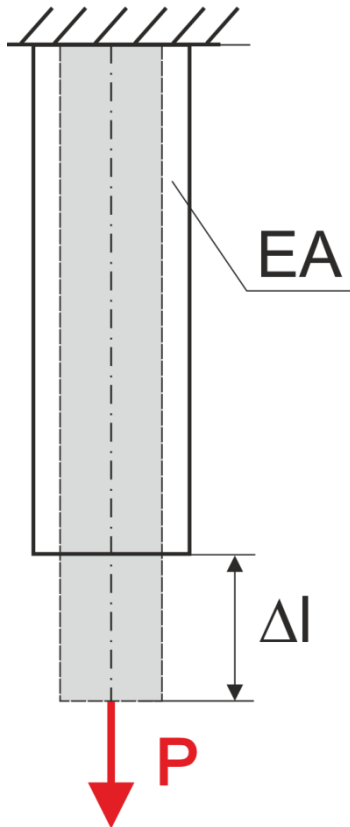
POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wykład NR7 v. 4.0

ENERGIA SPRĘŻYSTA

dr hab. inż. Piotr PACZOS

**Politechnika Poznańska,
Instytut Mechaniki Stosowanej,
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji**



$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

$$\Delta l(x) = \frac{N \cdot x}{E \cdot A}$$

Przyrost długości pręta zachodzi przy stopniowo zwiększającej wartości siły P . Każdej pośredniej wartości siły P równej sile P_1 odpowiada według Prawa Hooock'a sprężyste wydłużenie jednostkowe:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad \text{a wydłużenie całkowite:}$$

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 \cdot l = \frac{P_1 l}{EA}$$

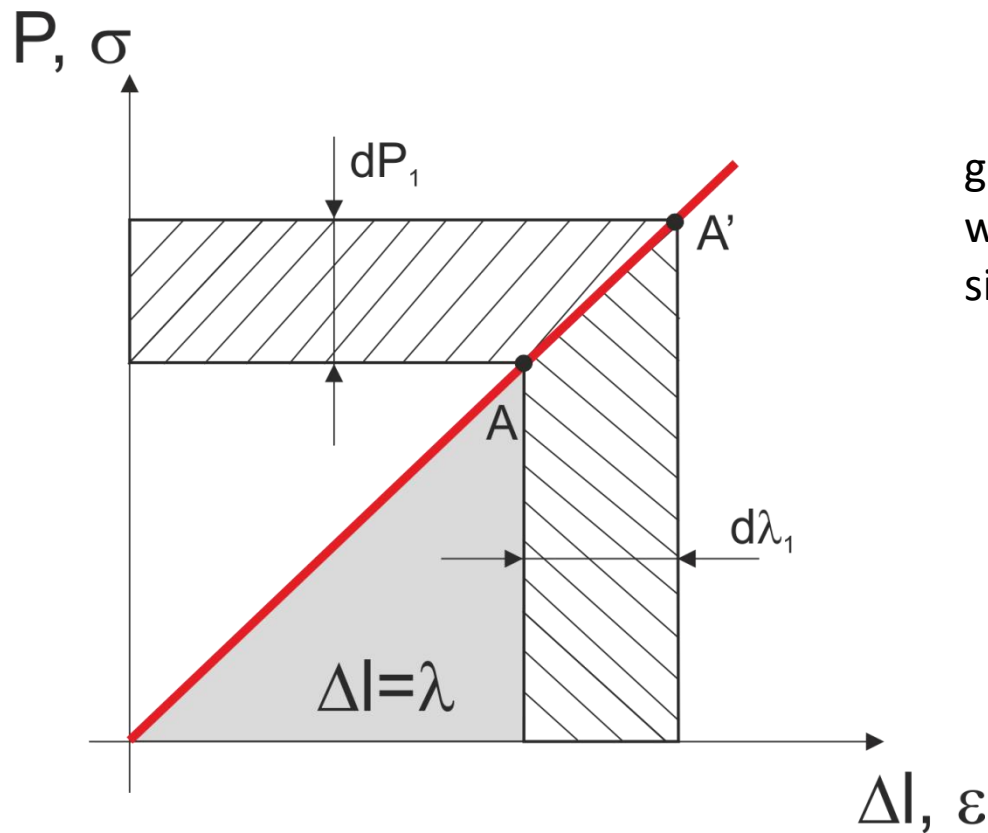
Elementarna praca odkształcenia jest równa:

$$dL = P_1 \cdot d\lambda_1$$

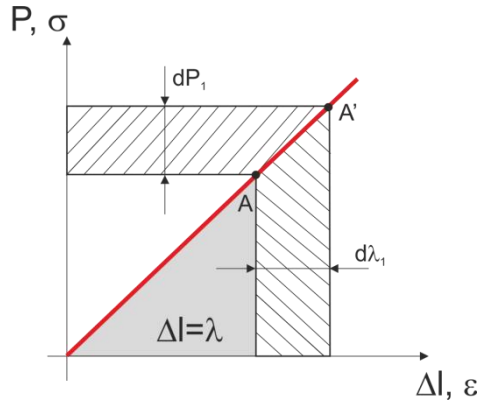
gdzie, $d\lambda_1$ jest elementarnym przyrostem wydłużenia odpowiadający przyrostowi siły dP_1

$$dL = \frac{1}{EA} P_1 \cdot dP_1$$

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 \cdot l = \frac{P_1 l}{EA}$$



Przy wartości siły P_1 i odkształceniu λ_1 od zera do swoich końcowych wartości P i λ - otrzymamy po scałkowaniu całkowitą pracę odkształcenia:



$$\int (dL) = \int \left(\frac{1}{EA} P_1 \cdot dP_1 \right) \rightarrow L = \frac{1}{EA} \int_0^P P_1 \cdot dP_1 = \frac{P^2 l}{2EA}$$

Przyjmując, że praca odkształcenia sprężystego jest równa energii sprężystej zawartej w pręcie, wówczas:

$$L = V \rightarrow \frac{1}{2} P \lambda = \frac{1}{2} \frac{P^2 l}{EA}$$

V – energie sprężysta w pręcie

Aby otrzymać wynik nie zależny od rozmiarów pręta obliczamy energię sprężystą odniesioną do jednostki objętości pręta, zwaną **ENERGIĄ WŁAŚCIWĄ** (energia jednostkową)

$$\Phi = \frac{V}{Al}$$

Diagram illustrating the formula for strain energy per unit volume (Φ). The formula is enclosed in a red box. Arrows point from the components to the formula: "Energia sprężysta" (Strain energy) points to V , "Objętość pręta" (Volume of the bar) points to Al , and "Energia właściwa" (Strain energy per unit volume) points to the entire formula Φ .

$$\Phi = \frac{V}{Al} = \frac{1}{2} \frac{P^2 l}{EA} \cdot \frac{1}{Al} = \frac{1}{2E} \left(\frac{P}{A} \right)^2 \quad \text{wiedząc, że} \quad \sigma = \frac{P}{A}$$

lub FORMA NAPRĘŻENIOWA

$$\Phi = \frac{1}{2E} \sigma^2$$

Jak widać energia właściwa jest kwadratową funkcją naprężeń

Ponieważ:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \text{i} \quad \sigma = E\varepsilon$$

Naprężenia z DEFINICJI

Prawo HOOKE'A

Forma mieszana: naprężenie - odkształcenie

$$\Phi = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon$$

Forma odkształceniowa

$$\Phi = \frac{1}{2} E \cdot \varepsilon^2$$



Przy ścinaniu, otrzymamy:

Forma mieszana: naprężenie - odkształcenie

$$\Phi = \frac{1}{2} \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy}$$

Forma odkształceniowa

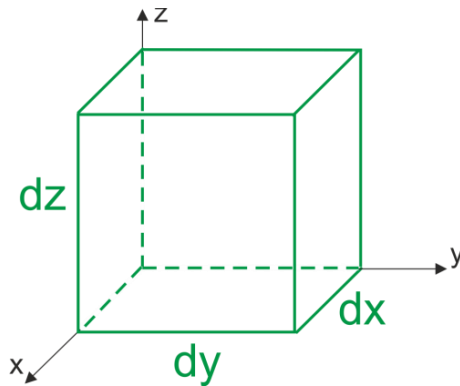
$$\Phi = \frac{1}{2} G \cdot \gamma_{xy}^2$$

Forma naprężeniowa

$$\Phi = \frac{1}{2G} \cdot \tau_{xy}^2$$

Energia sprężysta dla stanu jednoosiowego:

Jeżeli przejdziemy do stanów uogólnionych (trójosiowych) to związki na energię właściwą ulegną rozbudowaniu o dodatkowe składniki wynikające z oddziaływania dodatkowych składowych tensora odkształcenia (naprężenia)



Obliczamy energię sprężystą w elementarnej kostce $dx dy dz$

$$dV = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dx dy dz$$

Po podzieleniu przez objętość uzyskujemy energię właściwą:

$$\Phi = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz})$$

Wyrażenie to można przedstawić jako jednorodną kwadratową funkcję samych składowych naprężenia albo składowych stanu odkształcenia:

Forma naprężeniowa

$$\Phi = \frac{1}{E} \left[\frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + (1 + \nu) (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \sigma_z) \right]$$

Forma odkształceniowa

$$\Phi = G \left[\frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2) \right]$$

Energię właściwą można przedstawić jako sumę energii związanej ze stanem objętościowym i energią związaną ze stanem czysto postaciowym:

$$\Phi = \Phi_V + \Phi_f$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \varepsilon_{sr} + \sigma_x (\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}) + \sigma_y (\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}) + \sigma_z (\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}) + \right. \\ \left. + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz} \right]$$

Energia właściwa odkształcenia objętościowego:

$$\Phi_V = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \varepsilon_{sr}$$

Energia właściwa odkształcenia postaciowego:

$$\Phi_f = \frac{1}{2} \left[\sigma_x (\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}) + \sigma_y (\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}) + \sigma_z (\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}) + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz} \right]$$

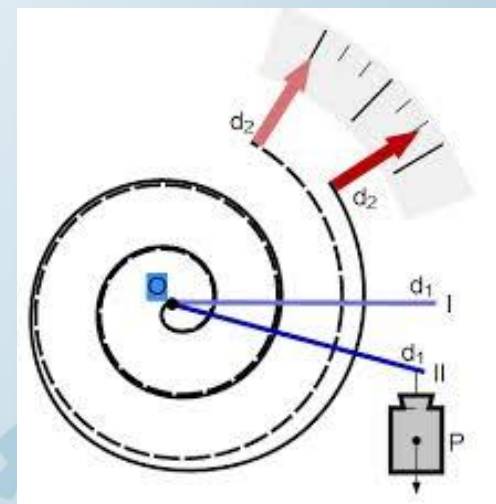
Jeżeli odkształcenie wyrazimy przez naprężenie w powyższych wzorach, to

Energia właściwa odkształcenia objętościowego:

$$\Phi_V = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

Energia właściwa odkształcenia postaciowego:

$$\Phi_f = \frac{1-2\nu}{6E} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right]$$



Twierdzenia o energii sprężystej [\[edytuj \]](#) [\[edytuj kod \]](#)

- **twierdzenie Bettiego** (o wzajemności prac i przemieszczeń)
- **twierdzenie J.C. Maxwella** (o wzajemności przemieszczeń): szczególna postać twierdzenia Bettiego gdy są tylko dwie równe siły
- **twierdzenie Castigliano**
- **twierdzenie Menabrei** (zasada minimum pracy)

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ
Zapraszam ponownie 😊