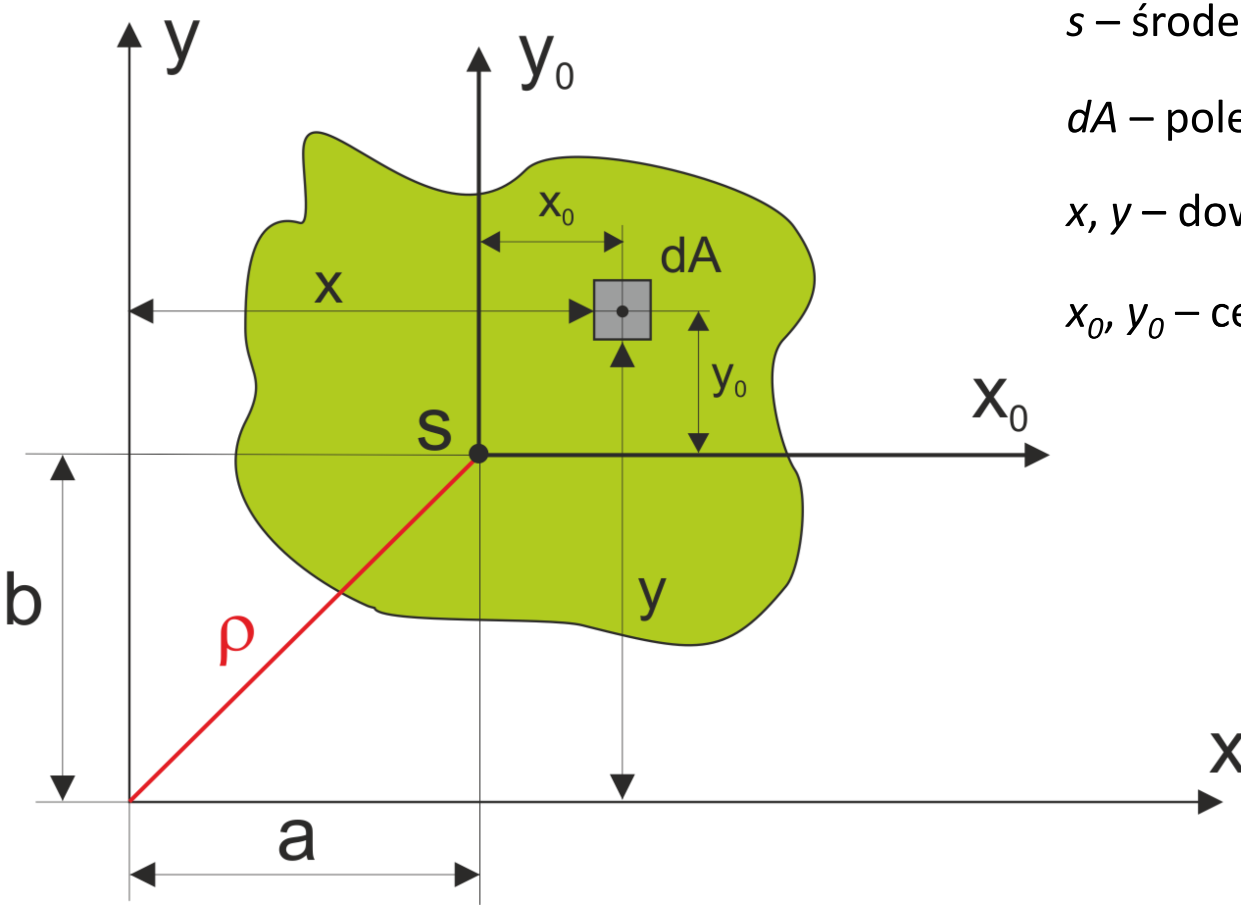
POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wykład NR10 v. 4.0

MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

dr hab. inż. Piotr PACZOS

Politechnika Poznańska,
Instytut Mechaniki Stosowanej,
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



A – pole

s – środek ciężkości obszaru płaskiego

dA – pole elementarne

x, *y* – dowolny układ współrzędnych

x_0, y_0 – centralny układ współrzędnych

Właściwości geometryczne przekrojów:

Przekroje poprzeczne prętów, wałów i belek – figury płaskie, charakteryzujące się następującymi parametrami:

– polem powierzchni przekroju: $A = \int_A dA,$ [mm², cm², m²],

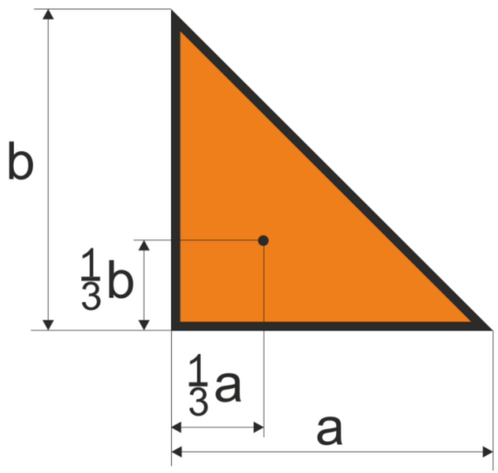
– położeniem środka ciężkości przekroju: $x_c = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = \frac{S_x}{A}.$

– momentami statycznymi $S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA,$ [mm³, cm³, m³],

– momentami bezwładności $I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA,$ [mm⁴, cm⁴, m⁴].

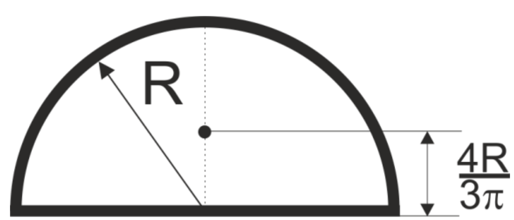
Środek CIĘŻKOŚCI (MASY)

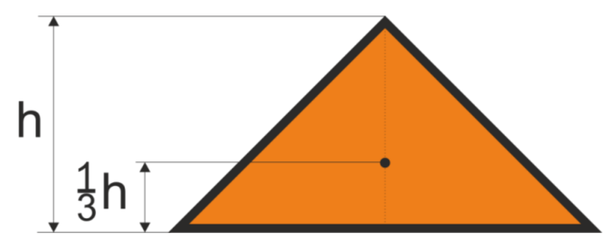
to miejsce przyłożenia wypadkowej siły ciężkości ciała (bryły)



Środkiem ciężkości ciała materialnego (bryły) nazywa się graniczne położenie środka sił równoległych, które są siłami ciężkości poszczególnych cząstek bryły na jakie myślowo została bryła podzielona, gdy największa z tych cząstek dąży do zera.

Środek ciężkości jest to punkt, w którym jest zaczepiona siła przedstawiająca ciężar danego ciała, i pokrywa się on ze środkiem sił równoległych, które reprezentują elementarne siły ciężkości, tj. siły przyciągania cząstek ciała materialnego przez kulę ziemską, skierowane pionowo do środka ziemi.





Definicja momentu statycznego w układzie osi X i Y:

$$S_x = \int_A y dA, \qquad S_y = \int_A x dA$$

W zależności od położenia przekroju względem osi układu współrzędnych **mogą przyjmować wartości dodatnie i ujemne**.

Wykorzystując znane ze statyki pojęcie środka sił,
dla środka ciężkości można napisać: $S_x = y_c A, \; S_y = x_c A$

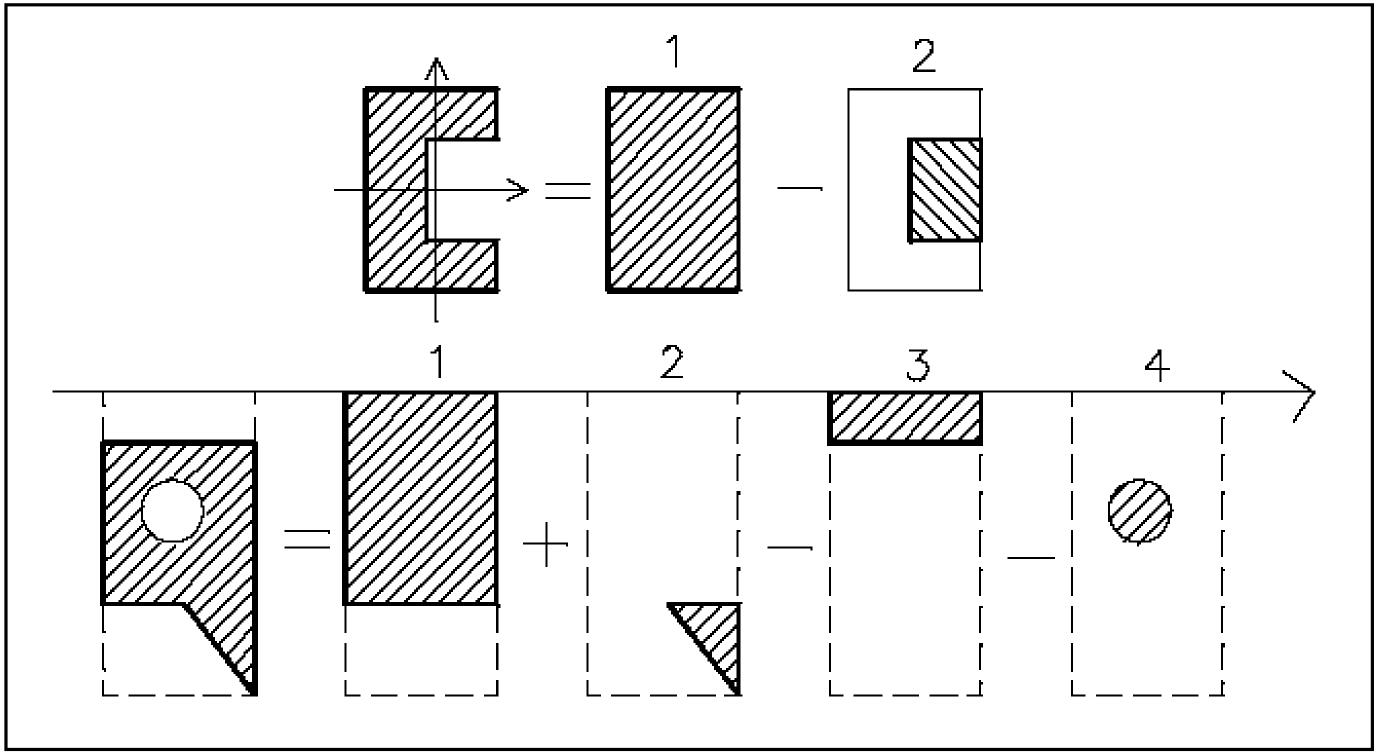
Korzystając z tych zależności, współrzędne środka ciężkości figury płaskiej można obliczyć ze wzoru:

$$x_c = \frac{S_y}{A}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A}$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_{y_i}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} A_i},$$

A_i – pola powierzchni figur prostych,
x_i, y_i – współrzędne środków ciężkości poszczególnych figur prostych.



Statyczny moment bezwładności – FIRST MOMENT AREA
Osiowy moment bezwładności - SECOND MOMENT AREA

DEFINICJA:
Momentem bezwładności osiowym (względem osi) nazywamy sumę iloczynów elementarnych pól i kwadratów ich odległości od danej osi

– osiowe momenty bezwładności

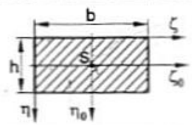
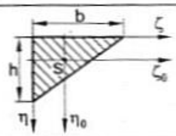
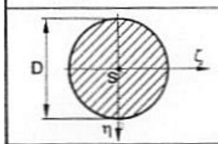
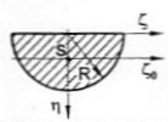
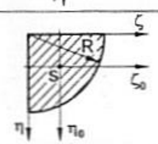
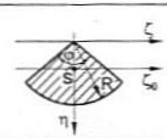
$$I_x = \int_A y^2 dA, \qquad I_y = \int_A x^2 dA,$$

– biegunowy moment bezwładności

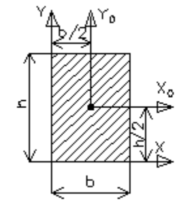
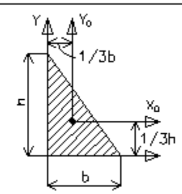
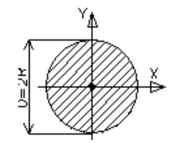
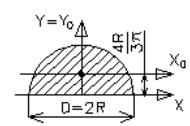
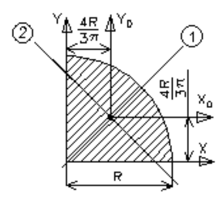
$$I_0 = \int_A \rho^2 dA = \int_A \left(x^2 + y^2\right) dA = I_x + I_y ,$$

– moment dewiacyjny (zboczenia, odśrodkowy)

$$I_{xy} = \int_A xy dA.$$

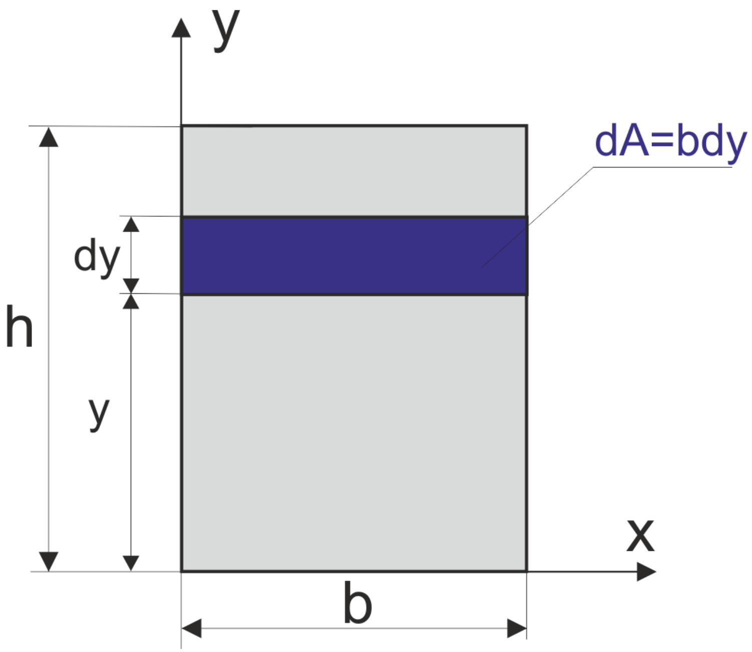
Przekrój	η_s	ζ_s	I_ζ	$I_{\zeta 0}$	$I_{\eta\zeta}$
	$\frac{1}{2}h$	$\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{3}bh^3$	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{4}b^2h^2$
	$\frac{1}{3}h$	$\frac{1}{3}b$	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{36}bh^3$	$\frac{1}{24}b^2h^2$
	0	0	$\frac{\pi}{64}D^4$	$\frac{\pi}{64}D^4$	0
	$\frac{4}{3\pi}R$	0	$\frac{\pi}{8}R^4$	$\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)R^4$	0
	$\frac{4}{3\pi}R$	$\frac{4}{3\pi}R$	$\frac{\pi}{16}R^4$	$\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right)R^4$	$\frac{1}{8}R^4$
	$\frac{4\sin\frac{\varphi}{2}}{3\varphi}R$	0	$\frac{1}{8}(\varphi+\sin\varphi)R^4$ $[I_\eta=\frac{1}{8}(\varphi-\sin\varphi)R^4]$	$\left(\frac{\varphi+\sin\varphi}{8}-\frac{4(1-\cos\varphi)}{9\varphi}\right)R^4$	0

Momenty bezwładności figur prostych

Figura	J_x	J_y	J_{xy}
	$J_{x_o}=\frac{bh^3}{12}$ $J_x=\frac{bh^3}{3}$	$J_{y_o}=\frac{hb^3}{12}$ $J_y=\frac{hb^3}{3}$	$J_{x_oy_o}=0$ $J_{xy}=\frac{b^2h^2}{4}$
	$J_{x_o}=\frac{bh^3}{36}$ $J_x=\frac{bh^3}{12}$	$J_{x_o}=\frac{hb^3}{36}$ $J_x=\frac{hb^3}{12}$	$J_{x_oy_o}=-\frac{b^2h^2}{72}$ $J_{xy}=\frac{b^2h^2}{24}$
	$J_x=\frac{\pi D^4}{64}=$ $=\frac{\pi R^4}{4}$	$J_y=\frac{\pi D^4}{64}=$ $=\frac{\pi R^4}{4}$	$J_{xy}=0$
	$J_{x_o}=\frac{D^4}{16}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)=$ $\approx 0{,}00686D^4=$ $\approx 0{,}1098R^4$ $J_x=\frac{\pi D^4}{128}=\frac{\pi R^4}{8}$	$J_y=\frac{\pi D^4}{128}=$ $=\frac{\pi R^4}{8}$	$J_{xy}=0$ $J_{x_oy_o}=0$
	$J_{x_o}=R^4\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right)=$ $\approx 0{,}0549R^4$ $J_x=\frac{\pi D^4}{256}=\frac{\pi R^4}{16}$	$J_y=\frac{\pi R^4}{16}$	$J_{xy}=\frac{R^4}{8}$ $J_{x_oy_o}=\frac{R^4}{8}-\frac{4R^4}{9\pi}=$ $=-0{,}0165R^4$

Wyznaczanie momentów bezwładności:

Prostokąt – kwadrat? ??

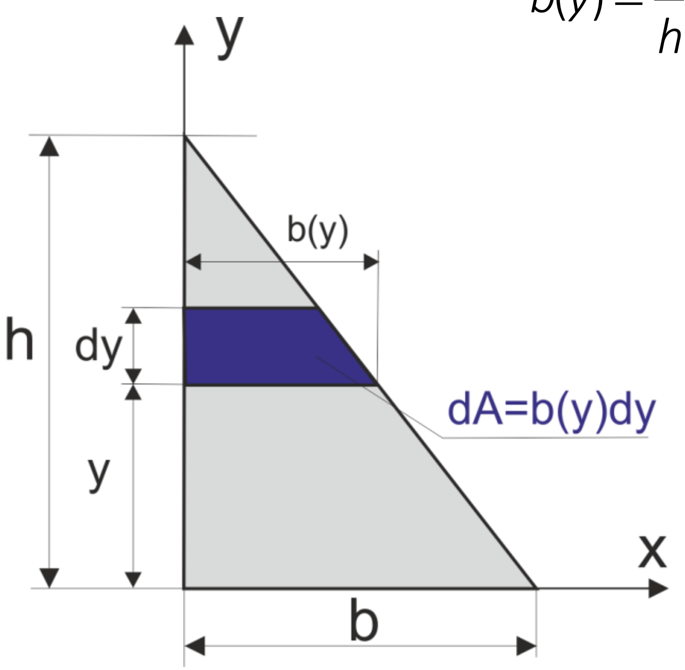


$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = \left[\frac{1}{3} y^3 b\right]_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 h dx = \left[\frac{1}{3} x^3 h\right]_0^b = \frac{hb^3}{3}$$

Trójkąt prostokątny

$$b(y) = \frac{b}{h}(h - y)$$



Z Twierdzenia TALESA: $$\frac{b}{b(y)} = \frac{h}{(h - y)}$$

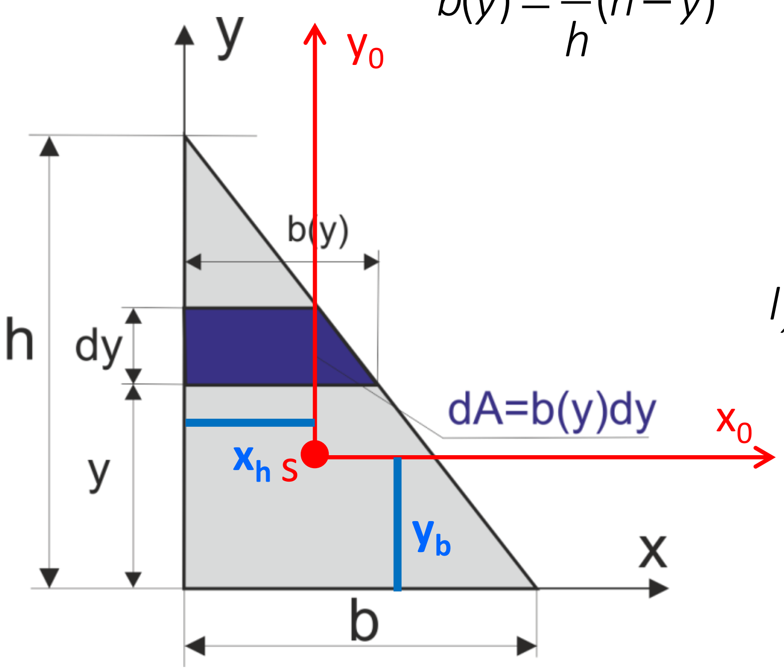
$$dA = b(y)dy = \frac{b}{h}(h - y)dy$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b(y)dy$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h - y)dy = \int_0^h y^2 b dy - \int_0^h y^3 \frac{b}{h} dy = \left[\frac{1}{3} y^3 b\right]_0^h - \left[\frac{1}{4} y^4 \frac{b}{h}\right]_0^h = \frac{bh^3}{12}$$

Trójkąt prostokątny – moment dewiacyjny

$$b(y) = \frac{b}{h}(h-y)$$



$$I_{xy} = \int_A xy\,dA = \int_0^h xyb(y)dy$$

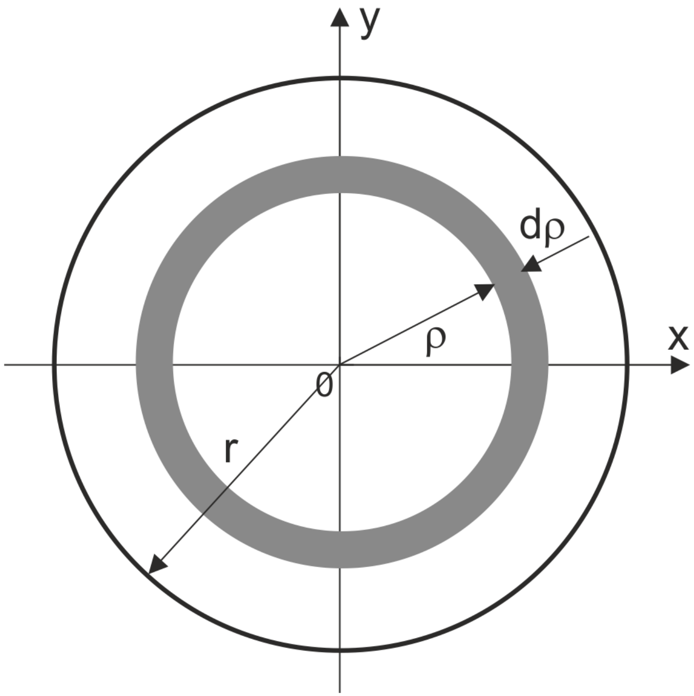
$$I_{xy} = \int_0^h \frac{b(y)}{2} yb(y)dy = \int_0^h \frac{1}{2} b(y)^2 y dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^h \frac{b^2}{h^2}(h-y)^2 dy = ... = \frac{b^2h^2}{24}$$

$$I_{x_0y_0} = I_{xy} - x_h y_b A = \frac{b^2h^2}{24} - \left(\frac{h}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}bh = \frac{b^2h^2}{24} - \frac{b^2h^2}{18} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

Koło – Półkole - Wycinek

$$dA = 2\pi\rho d\rho$$



$$I_0 = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_0 = I_x + I_y$$ stąd

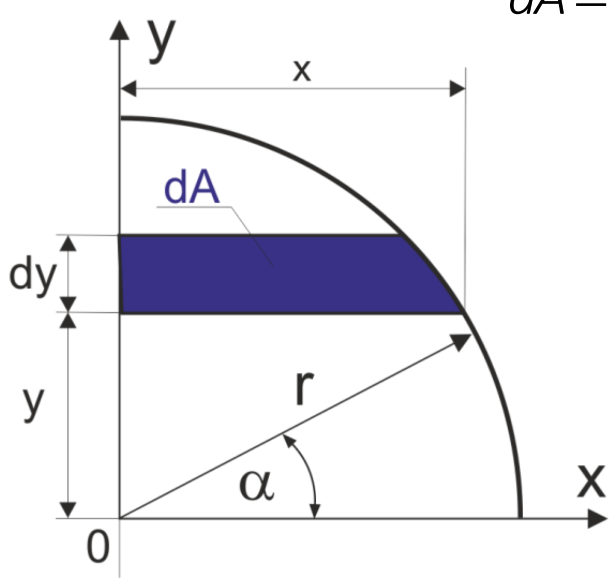
$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

Wyznaczenie położenia środka ciężkości:

$$y_c = \frac{S_x}{A}, \quad x_c = \frac{S_y}{A}$$

$$dA = xdy$$

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^r y(xdy)$$



Do powyższego wyrażenia podstawiamy następujące zależności:

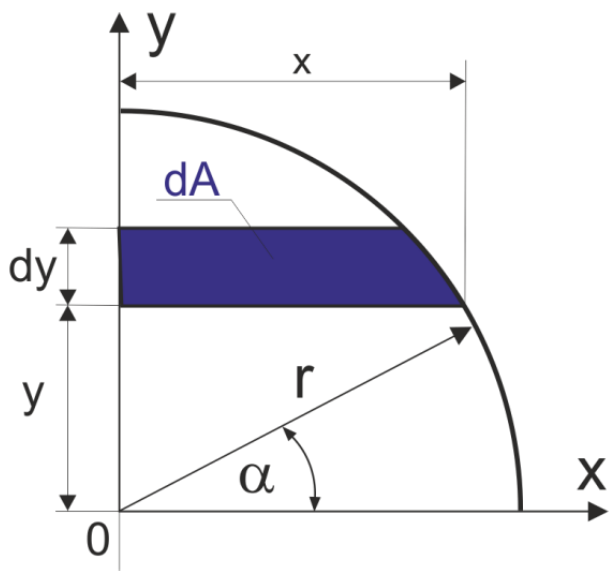
$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha,$$

$$dy = r\cos\alpha \cdot d\alpha$$

Po podstawieniu i scałkowaniu uzyskujemy:

$$S_x = r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\alpha \sin\alpha d\alpha = -r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\alpha d(\cos\alpha) = -\frac{r^3}{3}\cos^3\alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^3}{3}$$

Jeśli $S_x = \frac{r^3}{3}$ otrzymujemy: $y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{r^3}{3}}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi} = x_c$



Dewiacyjny moment bezwładności oblicza się w następujący sposób:

$$I_{xy} = \int_A \frac{x}{2} y dA = \frac{1}{2}\int_0^y x^2 dy$$

Po podstawieniu do powyższej zależności związków:

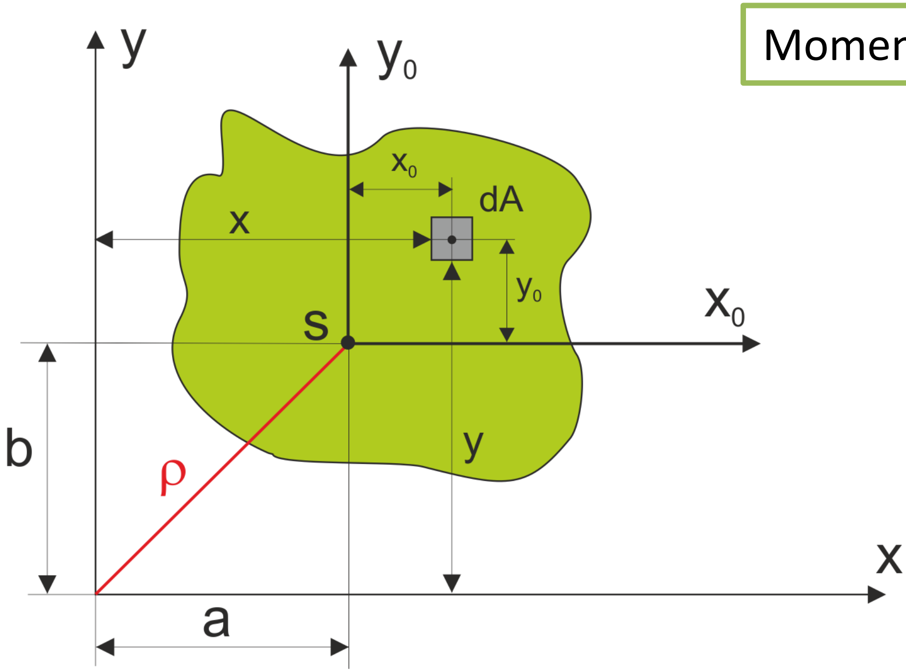
$$x = r\cos\alpha, \;\; y = r\sin\alpha,$$

$$dy = r\cos\alpha \cdot d\alpha$$

$$I_{xy} = \frac{r^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\alpha \sin\alpha d\alpha = -\frac{r^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\alpha d\left(\cos\alpha\right) = -\frac{r^4}{2}\frac{\cos^4\alpha}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^4}{8}$$

Twierdzenie STEINERA

Momenty bezwładności osiowy względem dowolnej osi przesuniętej równolegle, względem osi, która przechodzi przez środek ciężkości figury płaskiej jest równy momentowi bezwładności względem osi przechodzących przez środek figury plus pole figury i kwadratu odległości pomiędzy osiami.



Momenty osiowe względem układu centralnego:

$$I_{x_0} = \int_A y_0^2 dA,$$

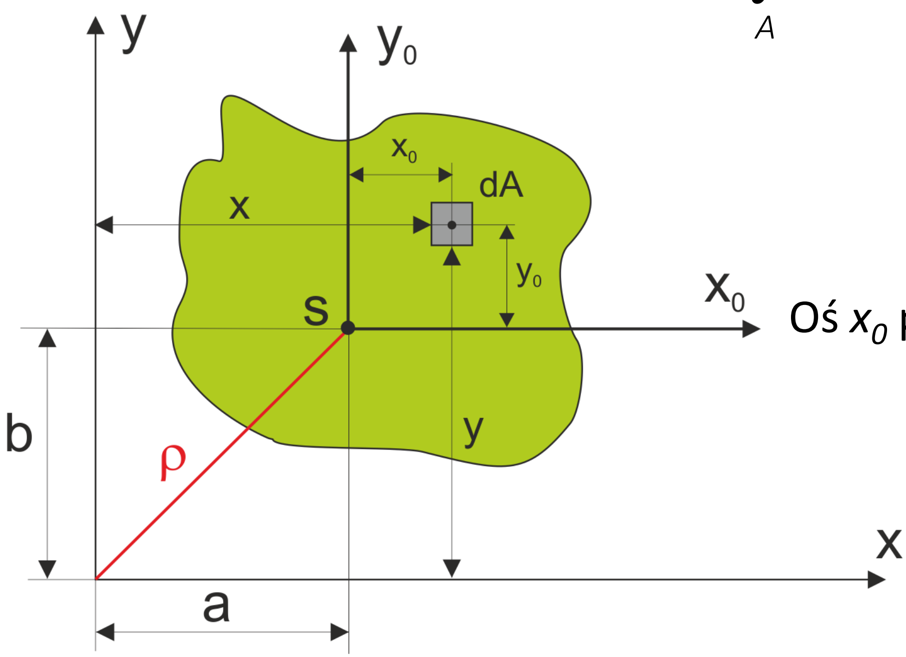
$$I_{y_0} = \int_A x_0^2 dA,$$

Momenty bezwładności względem dowolnych osi równoległych:

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA,$$

Ponieważ $x = x_0 + a, \quad y = y_0 + b$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y_0 + b)^2\, dA = \underbrace{\int_A y_0^2 dA}_{I_{x_0}} + 2b \underbrace{\int_A y_0 dA}_{S_{x_0}} + b^2 \underbrace{\int_A dA}_{A}$$



Oś x_0 przechodzi przez środek ciężkości, więc $S_{x_0} = 0$

$$\boxed{I_x = I_{x_0} + b^2 A}$$

Wzory STEINERA:

$$I_x = I_{x_0} + b^2 A$$

$$I_y = I_{y_0} + a^2 A$$

$$I_{xy} = I_{x_0 y_0} + abA$$

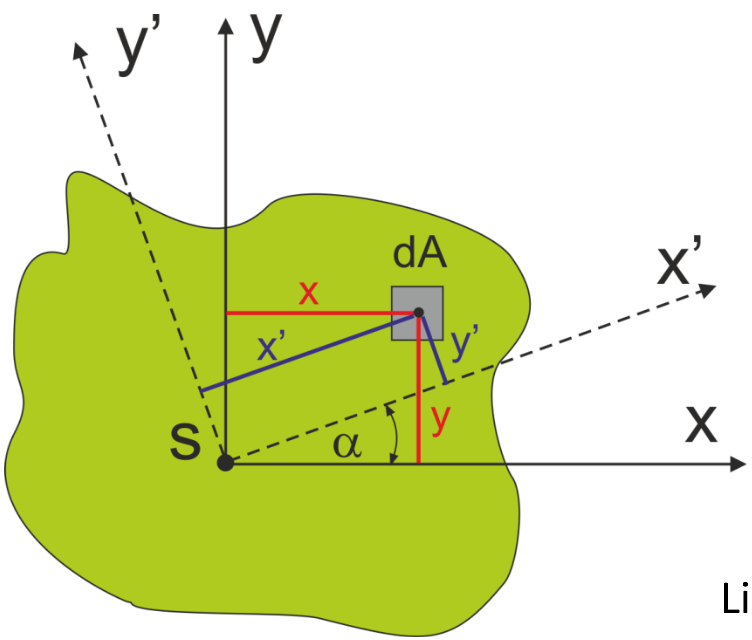
Z przekształcenia mamy:

$$I_{x_0} = I_x - b^2 A$$

$$I_{y_0} = I_y - a^2 A$$

$$I_{x_0 y_0} = I_{xy} - abA$$

Obrót osi i główne centralne momenty bezwładności



Wzory transformacyjne:

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

Rzutujemy układ *x,y* na *x',y'*

Dane: I_x, I_y, I_{xy}

Liczymy moment bezwładności względem osi *x'*

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Liczymy moment bezwładności względem osi *x'*

$$I_{x'} = \int_A (y')^2 dA = \int_A (-x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 dA = \int_A \left(x^2\sin^2\alpha - 2xy\sin\alpha\cos\alpha + y^2\cos^2\alpha\right) dA =$$

$$= \sin^2\alpha \int_A x^2 dA - \sin 2\alpha \int_A xy dA + \cos^2\alpha \int_A y^2 dA$$

Wzory transformacyjne dla momentów bezwładności – obrót układu

$$\boxed{I_{x'} = I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha}$$

Moment główny

$$\boxed{I_{y'} = I_x\sin^2\alpha + I_y\cos^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha}$$

Moment główny

$$\boxed{I_{x'y'} = \frac{I_x + I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha}$$

Moment dewiacyjny

Przejście od układu dowolnego do dowolnego

Jeżeli moment dewiacyjny I_{xy} lub $I_{x'y'}$ są równe zero=0 to osiowe momenty bezwładności odpowiadające temu układowi osi są ekstremalne, czyli jeden przyjmuje wartości MAX, a drugi MIN i są nazywane **momentami głównymi**.

Jeżeli założymy, że kąt α jest argumentem , to ekstremum każdego z momentów bezwładności obliczymy z warunków:

$$\frac{dI_{x'}}{d\alpha}=0,\quad \frac{dI_{y'}}{d\alpha}=0,\quad \frac{dI_{x'y'}}{d\alpha}=0,$$

$$-2I_x\cos\alpha+2I_y\sin\alpha\cos\alpha-2I_{xy}\cos2\alpha=0$$

$$-2I_x\sin2\alpha+I_y\sin2\alpha-2I_{xy}\cos2\alpha=0/:(-2)$$

$$\frac{I_x-I_y}{2}\sin2\alpha+I_{xy}\cos2\alpha=0$$

$$\boxed{tg2\alpha=\frac{2I_{xy}}{I_y-I_x}}$$

α_0 oraz $\alpha_0+\frac{\pi}{2}$ funkcja momentu bezwładności $I_{x'}$ osiąga wartości ekstremalne

Wstawiając te kąty do wyrażenia na $I_{x'}$ i wykonując przekształcenia znajdujemy główne momenty bezwładności (zgodnie ze wzorami trygonometrycznymi):

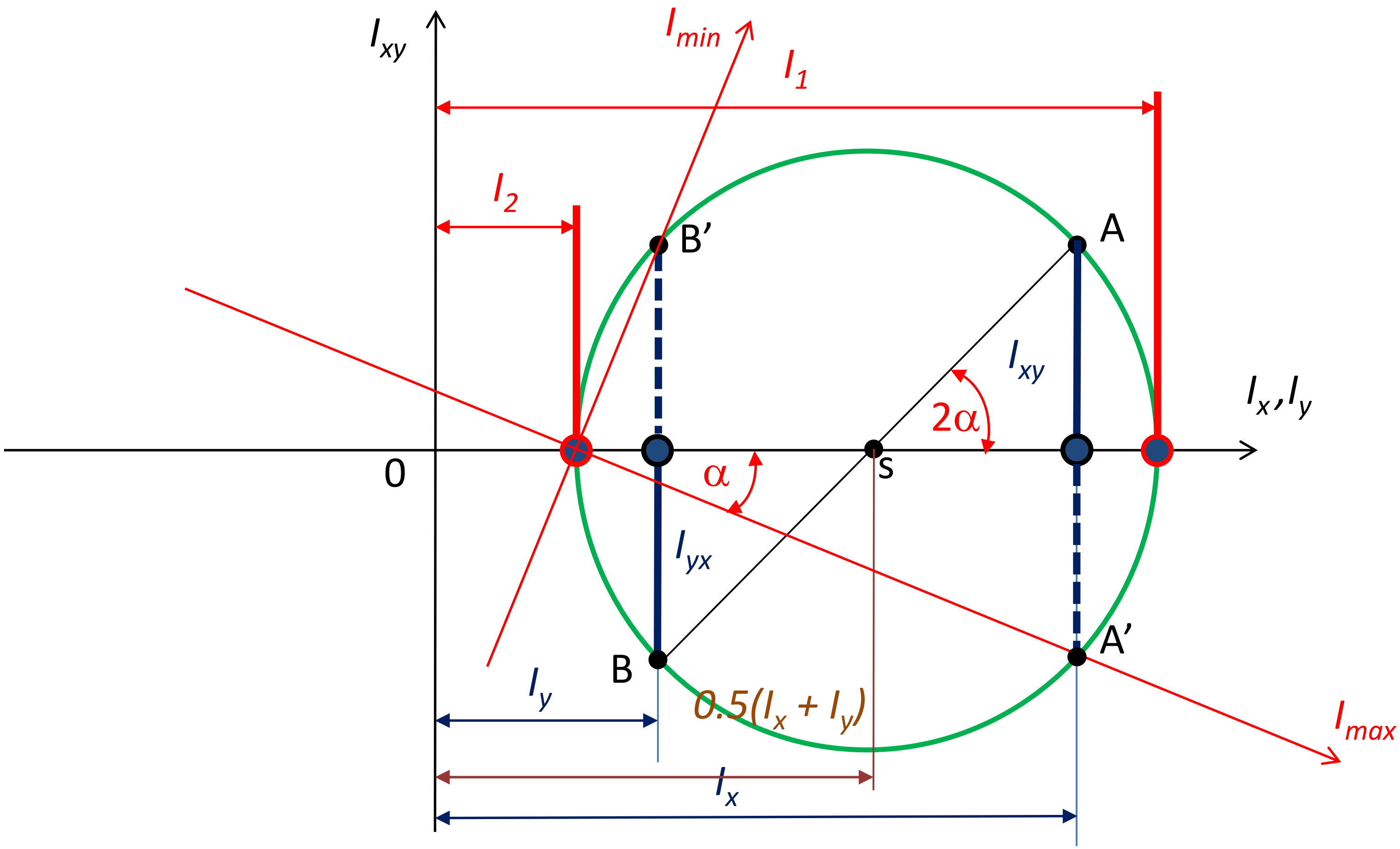
$$\boxed{I_{1,2} = I_{max,min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

Główne momenty bezwładności to osiowe momenty bezwładności, z których jeden przyjmuje wartość maksymalną - MAX a drugi minimalną – MIN
Odpowiadający im dewiacyjny mement bezwładności jest równy zero !!!

Wszystkie figury posiadające choć jedną oś symetrii nie wymagają dodatkowych obliczeń położenia głównych osi bezwładności ponieważ każda oś symetrii jest jednocześnie jedną z osi głównych.

Układ *XY* przechodzący przez środek figury nazywa się **układem centralnym**

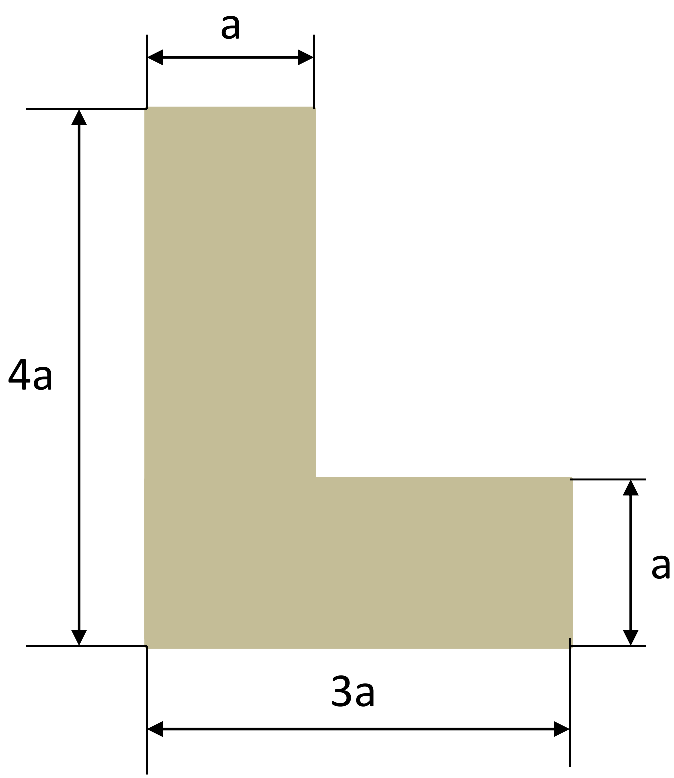
Koło MOHRA dla momentów bezwładności:



POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Zadanie 1

Dla przedstawionej na rysunku figury wyznaczyć środek ciężkości i momenty główne, dewiacyjny oraz wyznaczyć położenie głównych centralnych osi bezwładności (kąt α)



Dane: a

POLICZYĆ:

x_c, y_c lub e_x, e_y

I_x, I_y

I_{xy}

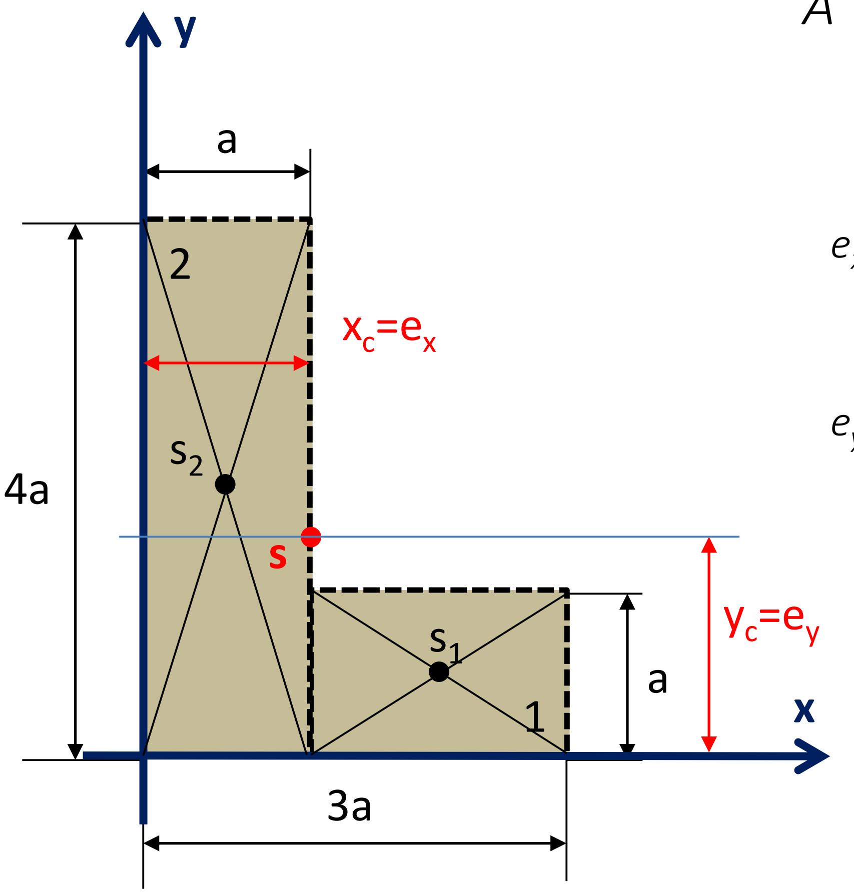
I_{x0}, I_{y0}

I_1, I_2

α

1. Położenie środka ciężkości:

$$e_x = x_c = \frac{S_y}{A}, \quad e_y = y_c = \frac{S_x}{A} \quad \Rightarrow \quad s\left(e_x, e_y\right)$$

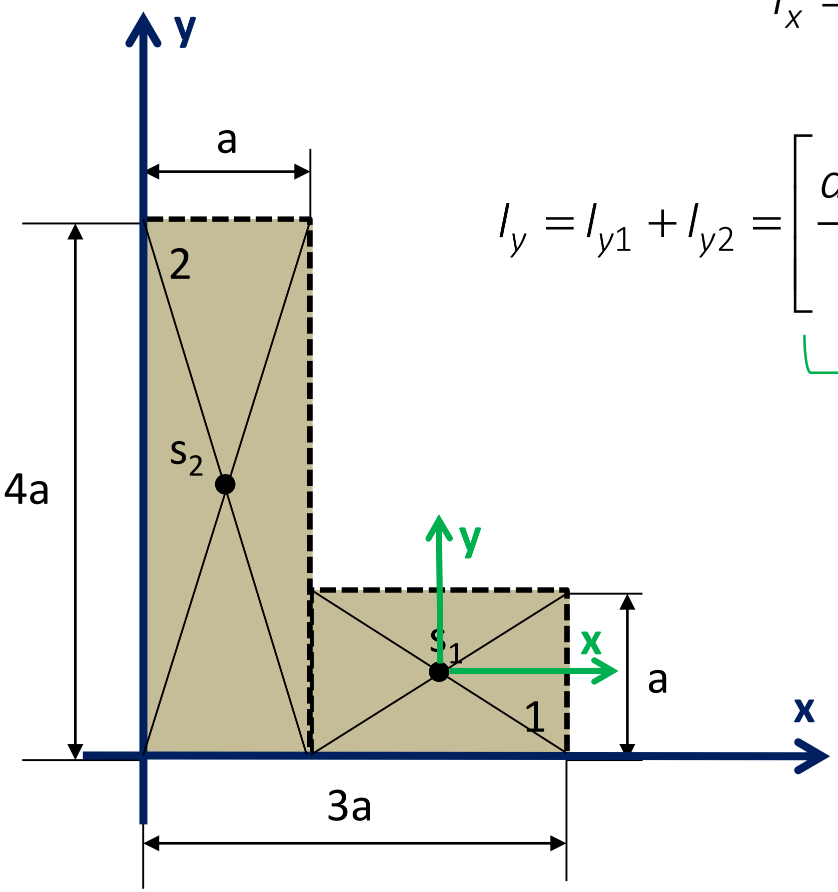


$$e_x = x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{(a\cdot 2a)(2a)+(4a\cdot a)\left(\frac{1}{2}a\right)}{2a\cdot a+4a\cdot a} = a$$

$$e_y = y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{(2a\cdot a)\left(\frac{1}{2}a\right)+(a\cdot 4a)(2a)}{2a\cdot a+4a\cdot a} = \frac{3}{2}a$$

$$\boxed{s\left(e_x, e_y\right) = s\left(a, \frac{3}{2}a\right)}$$

2. Osiowe momenty bezwładności:



$$I_x = I_{x1} + I_{x2} = \frac{2a\cdot(a)^3}{3} + \frac{a\cdot(4a)^3}{3} = 22a^4$$

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} = \underbrace{\left[\frac{a\cdot(2a)^3}{12} + 2a^2(2a)^2\right]}_{\text{Tw. Steinera}} + \frac{4a\cdot(a)^3}{3} = 10a^4$$

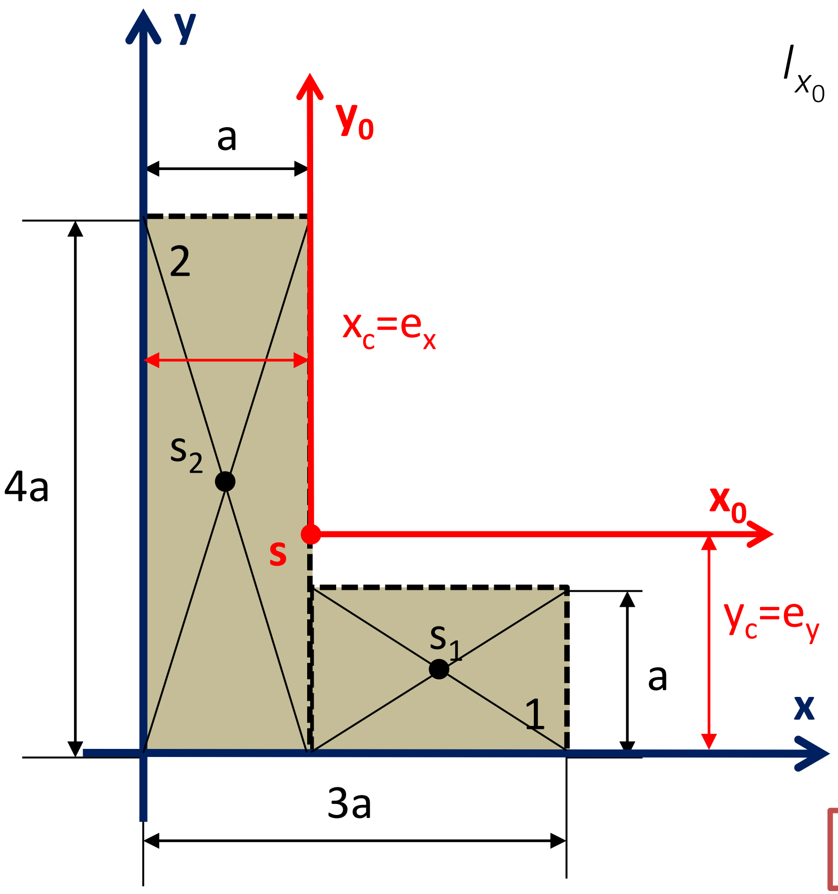
$$\boxed{I_{xy} = I_{xy1} + I_{xy2} \neq 0}$$

$$\boxed{I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}}$$

$$I_{xy} = 6a^4 \neq 0$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

3. Centralne momenty bezwładności (osie centralne):



$$I_{x_0} = I_x - y_c^2 A = 22a^4 - \left(\frac{3}{2}a\right)^2 6a^2 = 8{,}5a^4$$

$$I_{y_0} = I_y - x_c^2 A = 10a^4 - (a)^2 6a^2 = 4a^4$$

$$I_{x_0 y_0} = I_{xy1} + I_{xy2} = -3a^4$$

Ponieważ: $I_{x_0 y_0} \neq 0$

to osie centralne nie są **osiami głównymi**

4. Główne momenty bezwładności:

$$I_{1,2}=\frac{I_{x_0}+I_{y_0}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_{x_0}-I_{y_0}}{2}\right)^2+I_{x_0y_0}^2}$$

$$I_{1,2}=\frac{8{,}5a^4+4a^4}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{8{,}5a^4-4a^4}{2}\right)^2+\left(-3a^4\right)^2}$$

$$I_{1,2}=5{,}25a^4\pm4{,}42a^4$$

$$I_1=I_{max}=6{,}25a^4+3{,}35a^4=9{,}67a^4$$

$$I_2=I_{min}=6{,}25a^4-3{,}35a^4=2{,}9a^4$$

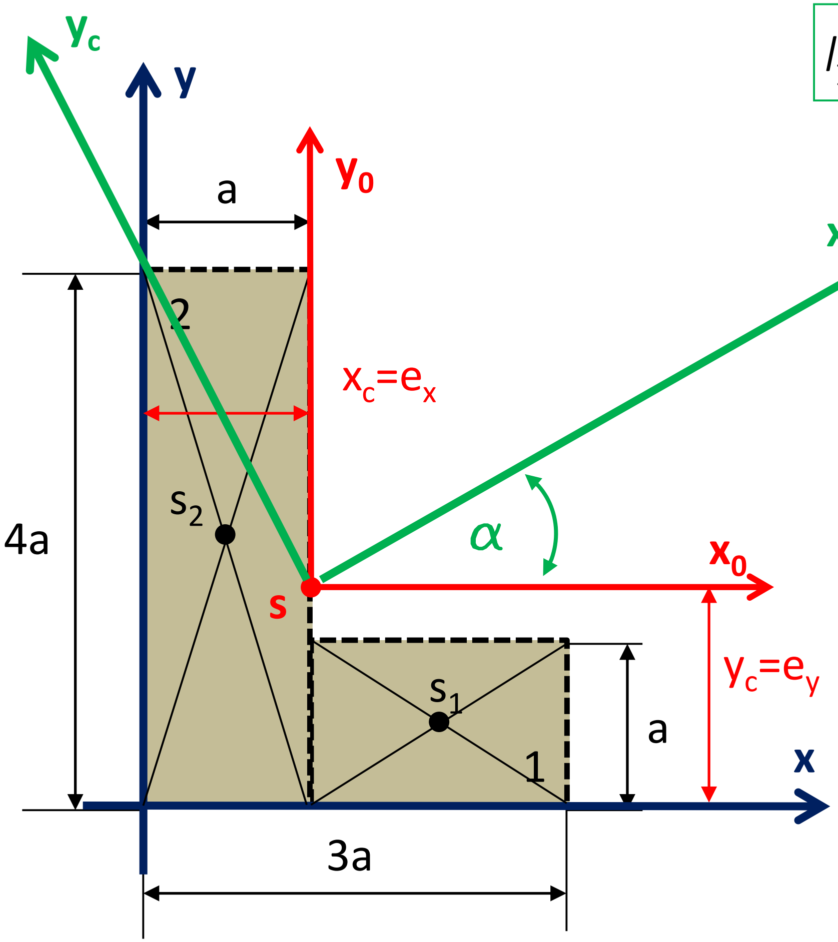
$$tg2\alpha=\frac{2I_{x_0y_0}}{I_{y_0}-I_{x_0}}$$

$$tg2\alpha=\frac{2I_{x_0y_0}}{I_{y_0}-I_{x_0}}=\frac{2\left(-3a^4\right)}{4a^4-8{,}5a^4}=\frac{6}{4{,}5}=1{,}33$$

$$2\alpha=53^\circ\quad\rightarrow\quad\alpha=26{,}5^\circ$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

5. Osie centralne, główne:

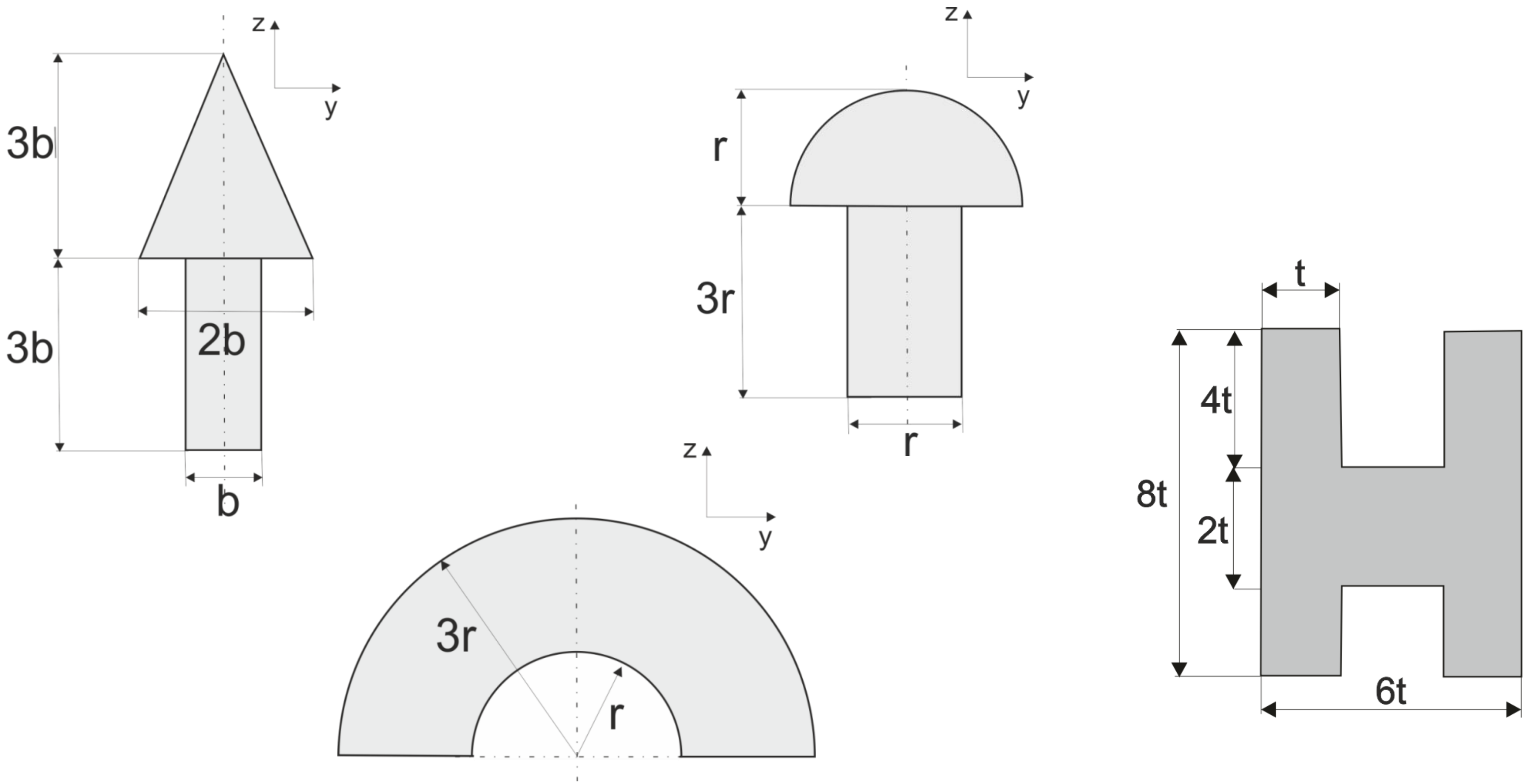


$$I_1 = I_{max} = 9{,}67a^4$$

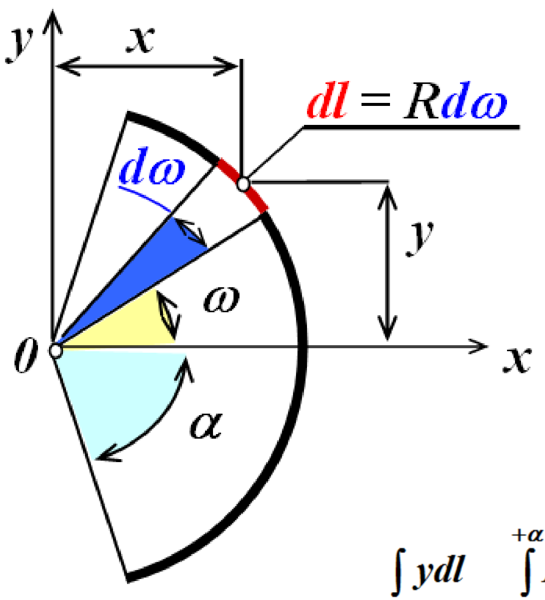
$$I_2 = I_{min} = 2{,}9a^4$$

$$\alpha = 26{,}5^\circ$$

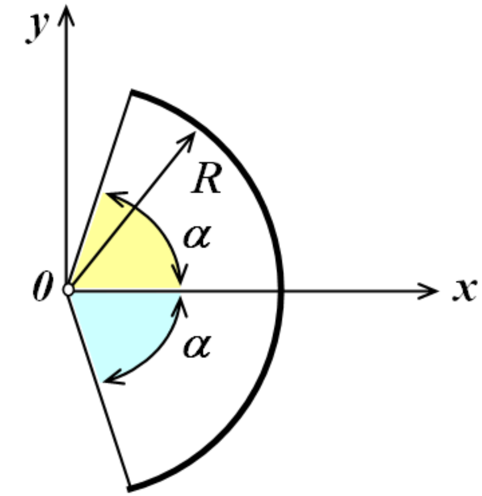
Zadania MOMENTY BEZWŁADNOŚCI



Określić położenie środka ciężkości łuku koła o promieniu R i kącie środkowym 2α



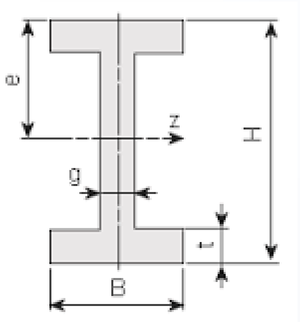
$$x = R\cos\omega$$
$$y = R\sin\omega$$

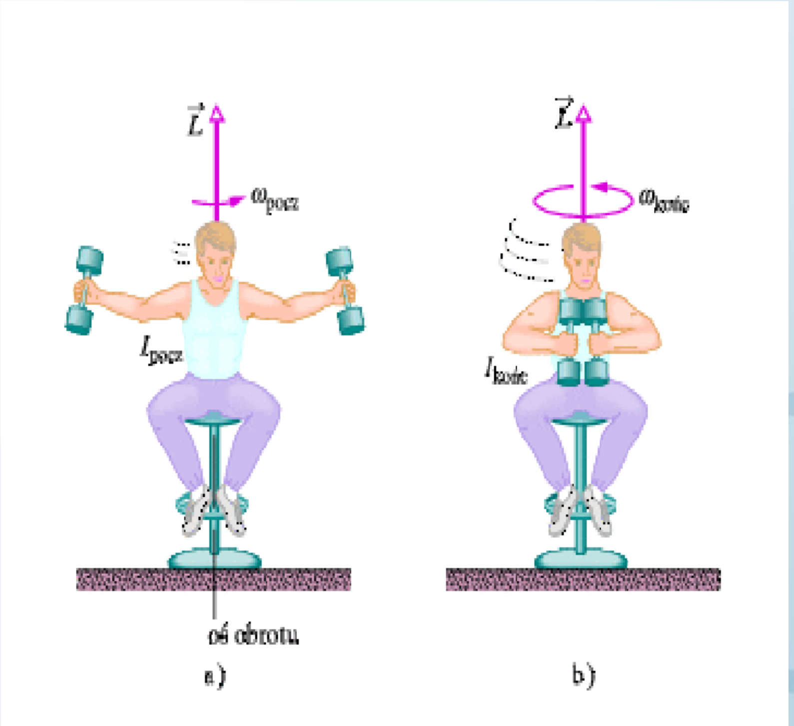


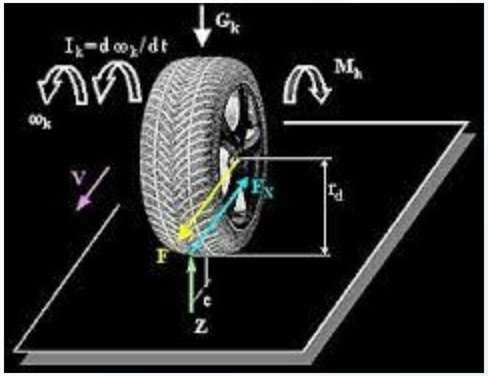
$$y_C = \frac{\int_l y\,dl}{\int_l dl} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R\sin\varphi R d\varphi}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R d\varphi} = \frac{R^2(\cos\alpha - \cos(-\alpha))}{R(\alpha - (-\alpha))} = \frac{0}{2R\alpha} = 0$$

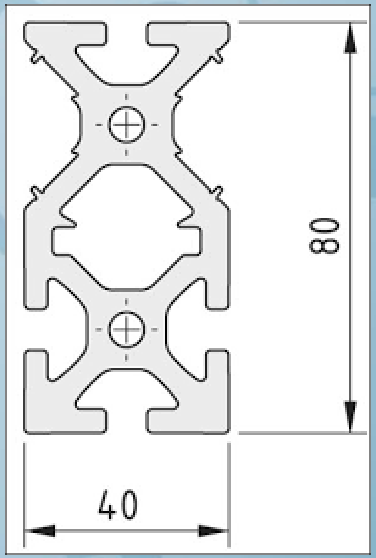
$$x_C = \frac{\int_l x\,dl}{\int_l dl} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R\cos\varphi R d\varphi}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R d\varphi} = \frac{R^2(\sin\alpha - \sin(-\alpha))}{R(\alpha - (-\alpha))} = \frac{2R^2\sin\alpha}{2R\alpha} = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA









DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

Zapraszam ponownie ☺