



POLITECHNIKA POZNAŃSKA

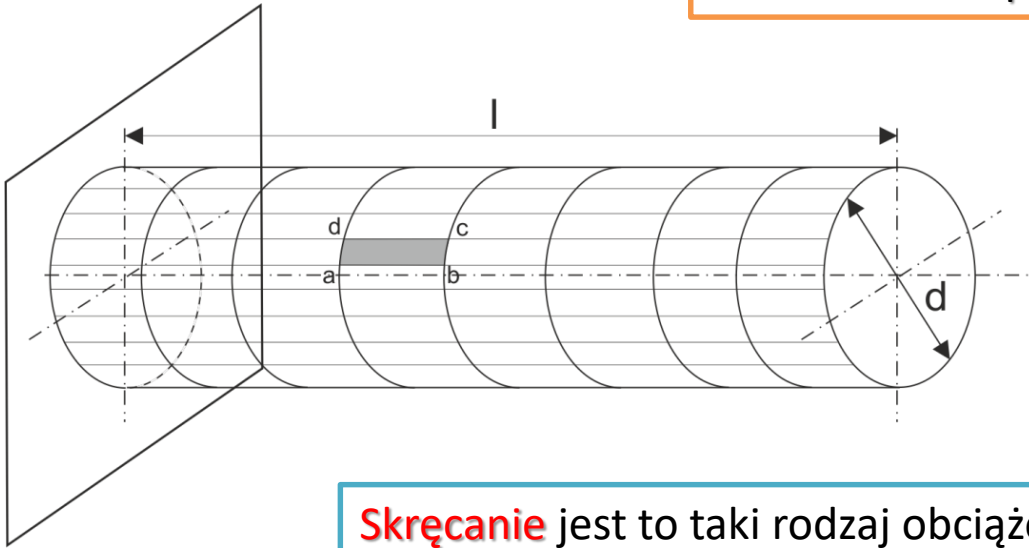
Wykład NR11 v. 4.0

SKRĘCANIE PRĘTÓW O PRZEKROJACH OKRĄGŁYCH

dr hab. inż. Piotr PACZOS

**Politechnika Poznańska,
Instytut Mechaniki Stosowanej,
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji**

Skręcanie prętów o przekrojach okrągłych opisuje teoria ścinania prostego

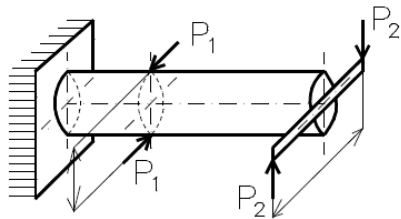


Skręcanie jest to taki rodzaj obciążenia, w którym w wyniku działania zewnętrznego momentu skręcającego M_s (przyczyna) obserwujemy odkształcenie elementu konstrukcji w postaci kąta γ . Kąt ten nazywamy też kątem odkształcenia postaciowego.

Pręt o przekroju kołowym

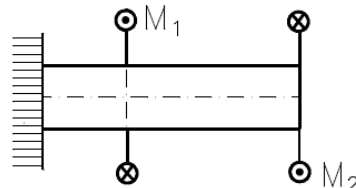
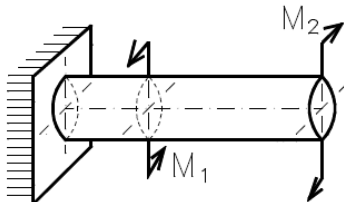
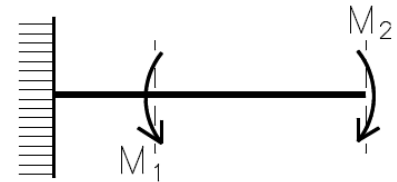
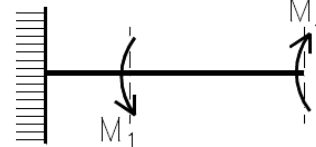
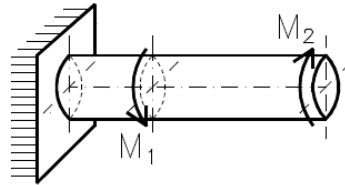
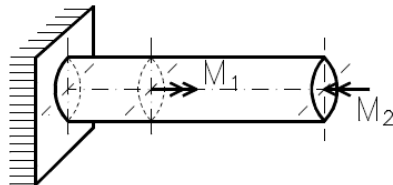
- hipoteza płaskich przekrojów – przekrój prostopadły do osi pręta pozostaje płaski
- w przekroju normalnym do osi pręta występują wyłącznie naprężenia styczne τ

Skręcanie prętów o przekrojach okrągłych opisuje teoria ścinania prostego



$$M_1 = P_1 d_1$$

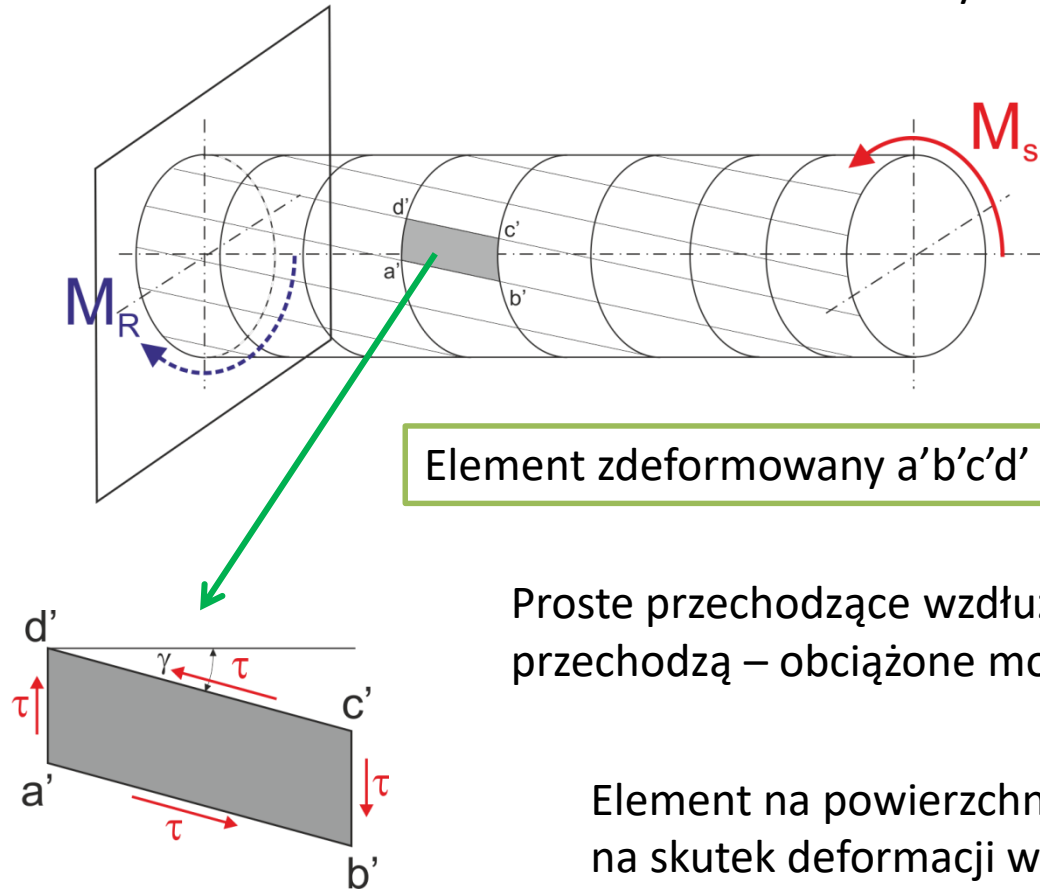
$$M_2 = P_2 d_2$$



Niejednoznaczne
określanie mo-
mentów

Momenty skręcające wał. Różne metody zaznaczania momentów skręcających.

M_R to reakcyjny moment bezwładności
wywołany obciążeniem zewnętrznym M_s



Element zdeformowany a'b'c'd'

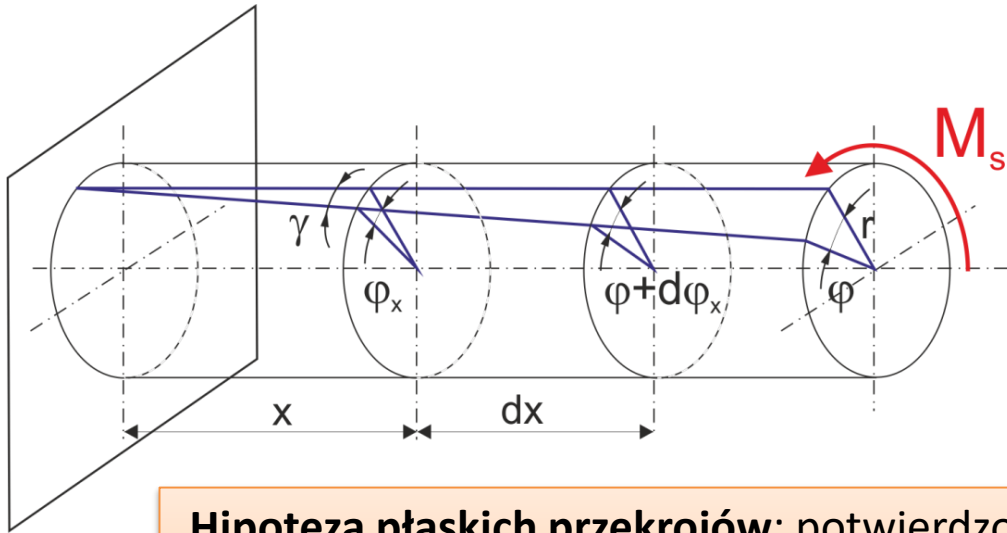
Proste przechodzące wzdłuż tworzącej w pręcie nieodkształconym, przechodzą – obciążone momentem skręcającym w linie śrubowe.

Element na powierzchni bocznej abcd zmienia swój kształt na skutek deformacji wywołanych naprężeniami ścinającymi.

Kąt skręcenia to kąt o jaki obróci się „przedmiot”

φ - kąt skręcenia przekroju pręta zmienia się wzdłuż osi pręta

γ - ulega zmianie jeśli będziemy się poruszali wzdłuż promienia pręta



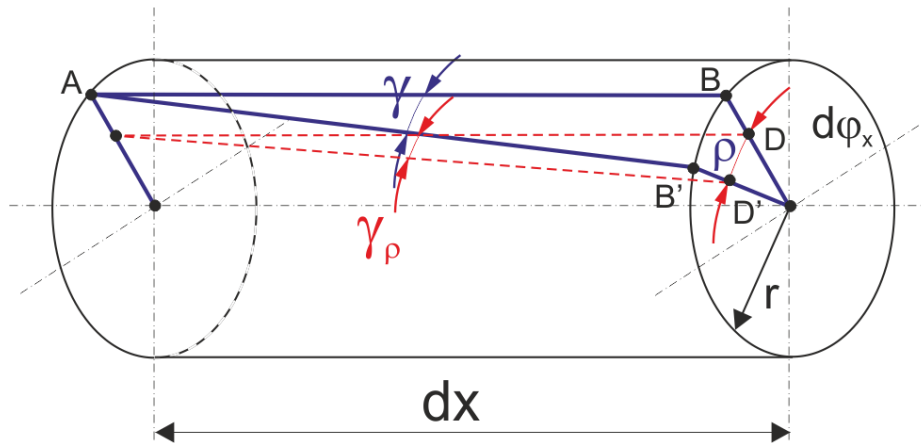
Hipoteza płaskich przekrojów: potwierdzona doświadczalnie hipoteza, zakładająca, że okrągłe przekroje poprzeczne wału pozostają po skręceniu płaskie i okrągłe, obracając się wokół osi wału o niewielki kąt. Hipoteza płaskich przekrojów pozwala na określenie mechanizmu odkształceń wału.

W oparciu o tą hipotezę wyprowadzono wzory pozwalające na obliczanie naprężeń stycznych w wale oraz kąta skręcenia wału.

$$0 \leq \rho \leq r$$

UWAGA:

Małe tg – kąty pomijamy



$$\overline{BB'} = \gamma dx$$

$$\overline{BB'} = r d\varphi_x$$

$$\longrightarrow \gamma dx = r d\varphi_x$$

$$\downarrow$$

$$\gamma = r \frac{d\varphi_x}{dx}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{DD'} = \gamma_\rho dx \\ \overline{DD'} = \rho d\varphi_x \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_\rho dx = \rho d\varphi_x \Rightarrow \gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi_x}{dx}$$

Kąt odkształcenia postaciowego γ jest związany z odkształceniem postaciowym ν



Kąt odkształcenia postaciowego γ jest związany z odkształceniem postaciowym ν za pomocą związku fizycznego:

$$\tau = \gamma \cdot G$$

Naprężenia tnące są proporcjonalne do kąta skręcenia (gamma)

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$0 \leq \rho \leq \rho_{\max} = r$$

$$\text{dla } \rho = 0 \rightarrow \gamma_{\rho} = 0$$

$$\text{dla } \rho = \rho_{\max} = r \rightarrow \gamma_{\rho} = \gamma_{\max}$$

WNIOSEK:

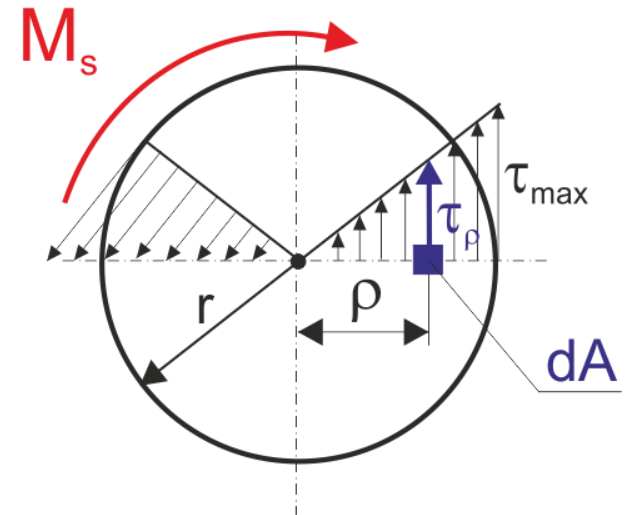
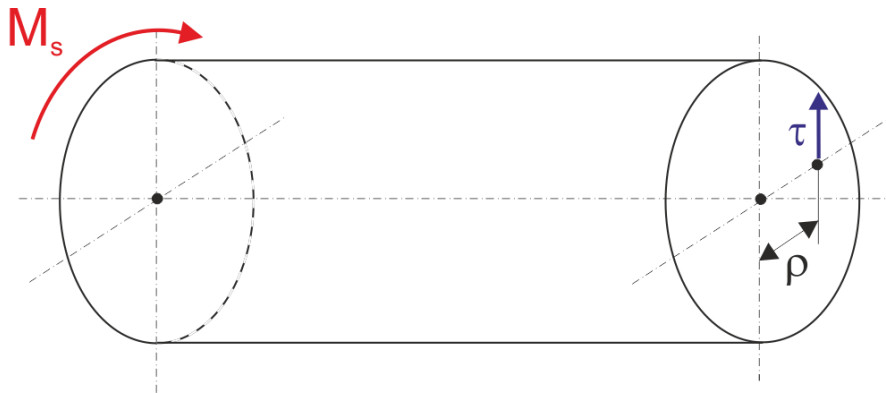
Naprężenia ścinające maksymalne występują dla $\rho = r$ czyli na powierzchni zewnętrznej, zmiana naprężeń wzdłuż promienia jest liniowa

ρ – jest w pierwszej potęgze

$$\tau_{\rho} = \gamma_{\rho} \cdot G$$

$$(1) \quad \tau_{\rho} = \rho \frac{d\varphi_x}{dx} \cdot G$$

Ponieważ w powyższym wzorze występują dwie niewiadome τ_{ρ} oraz $d\varphi_x / dx$ to brakujące równanie znajdujemy ze statyki (równań równowagi statycznej) „moment musi być czymś zrównoważony”





Warunek równowagi:

$$(2) \quad \sum M_s = 0 \rightarrow \int_A \tau_\rho \cdot \rho dA = M_s$$

$\tau_\rho \cdot dA$ – elementarna siła

Brakujące równanie otrzymujemy wstawiając powyższe równanie związek geometryczny (1) do równania równowagi (2):

$$\begin{aligned} \tau_\rho &= \gamma_\rho \cdot G \\ \tau_\rho &= \rho \frac{d\varphi_x}{dx} \cdot G \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \int_A \left(\rho \frac{d\varphi_x}{dx} \cdot G \right) \cdot \rho dA = M_s$$

$$G \cdot \frac{d\varphi_x}{dx} \underbrace{\int_A \rho^2 dA}_{I_o} = M_s$$

Biegunowy moment bezwładności I_o



$$(3) \quad G \cdot \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{M_s}{I_0} \longrightarrow \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{M_s}{I_0} \cdot \frac{1}{G}$$

Podstawiamy ponownie do równania (1):

$$\tau_\rho = \rho \cdot \frac{M_s}{I_0} \cdot \frac{1}{G} \cdot G$$

Zależność liniowa ρ w pierwszej potęgze

$$\tau_\rho = \rho \cdot \frac{M_s}{I_0}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{I_0} \cdot r \longrightarrow \frac{I_0}{r} = \frac{I_0}{\rho_{\max}} = W_0$$

W_0 – wskaźnik wytrzymałości na skręcanie

Warunek wytrzymałości pręta okrągłego na skręcanie:

$$\frac{M_s}{W_0} \leq k_s$$

$$\tau_s = \tau_{s\max} = \frac{M_s}{W_0} \leq k_s$$

k_s – dopuszczalne naprężenia na skręcanie ($k_s = 0,8k_r$)

M_s – wewnętrzny moment skręcający w przekroju pręta

Wewnętrzny moment skręcający pręta:

obliczamy jako algebraiczną sumę wszystkich zewnętrznych momentów skręcających działających po jednej stronie rozpatrywanego przekroju.

$$\tau_{\rho\max} = \frac{M_{s\max}}{W_0} \leq k_s \quad - \text{warunek wytrzymałości całego pręta}$$



Kąt skręcenia wyznaczamy z równania (3): $G \cdot \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{M_s}{I_0}$

$$d\varphi_x = \frac{M_s}{GI_0} dx$$

Dla pręta o długości l , kat skręcenia wynosi:

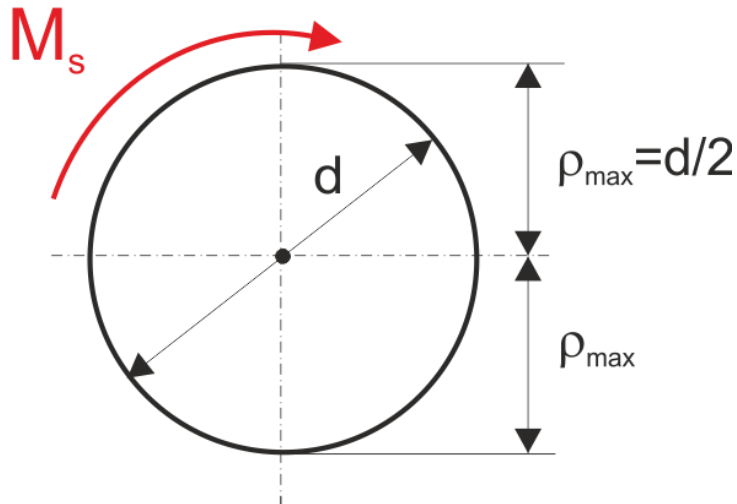
$$\varphi = \int_0^l \frac{M_s}{GI_0} dx = \frac{M_s l}{GI_0}$$

Kąt obrotu przekroju pręta wynosi:

$$\varphi = \frac{M_s l}{GI_0}$$

Obliczanie wskaźnika na skręcanie W_0 :

Wskaźnik wytrzymałości dla przekroju okrągłego:

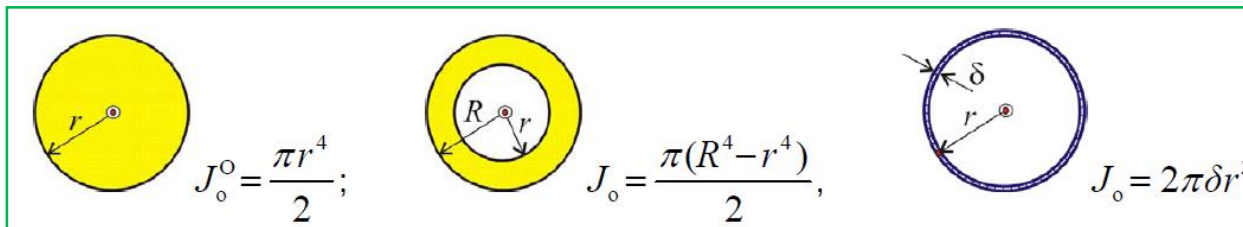


$$W_0 = \frac{I_0}{\frac{d}{2}}$$

$$I_0 = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

Stąd:

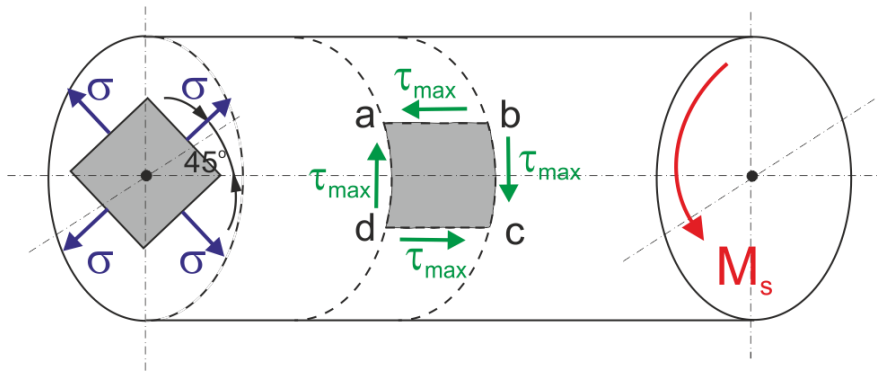
$$W_0 = \frac{I_0}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16} \cong \sim 0,2d^3$$



Warunek geometryczny:

Innym sposobem sprawdzenia warunku wytrzymałościowego dla skręcanego pręta są obliczenia na tzw. dopuszczalny kąt skręcenia. W konstrukcjach maszynowych przyjmuje się :

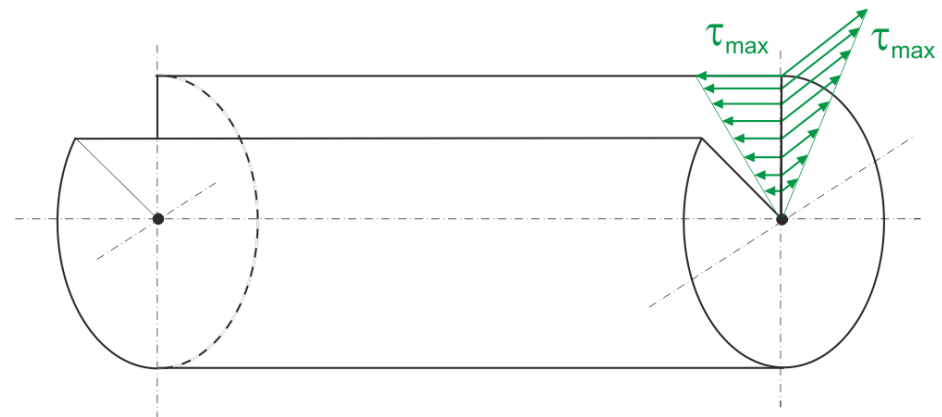
$$\varphi_{dop} = \frac{1^\circ}{4} / mb$$



$$\sigma_{1,2} = \pm \tau$$

$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau$$

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Obliczamy energię potencjalną sprężystą przy skręcaniu
Energia właściwa – dotyczy jednostki objętości:

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G}$$

Dla elementów pręta skręcanego o długości dx energia sprężysta wyniesie:

V – energia właściwa
 $dx dA = dV$ – objętość

$$dV = \int_A \Phi \cdot dx dA$$

$$dV = \int_A \Phi \cdot dx dA = \frac{1}{2} \frac{dx}{G} \int_A \tau_\rho^2 dA$$

Ponieważ: $\tau_\rho = \frac{M_s}{I_0} \cdot \rho$ to $dV = \frac{1}{2} \frac{\tau_{\max}^2}{G \cdot I_0^2} dx \int_A \rho^2 dA = \frac{1}{2} \frac{M_s^2 dx}{G I_0}$

Jak widać energia sprężysta w pręcie skręcanym jest kwadratową funkcją momentu skręcającego

$$dV = \frac{1}{2} \frac{M_s^2 dx}{G I_0}$$



Jak widać energia sprężysta w pręcie skręcanym jest kwadratową funkcją momentu skręcającego

$$dV = \frac{1}{2} \frac{M_s^2 dx}{G I_0}$$

lub

$$dV = \frac{1}{2} M_s \cdot \frac{M_s l}{G I_0} = \frac{1}{2} M_s \cdot \varphi$$

Moment skręcający M_s narasta proporcjonalnie dlatego mamy 1/2

Powtórka:

Iloczyn GJ_0 nosi nazwę **sztywności przekroju na skręcanie**
(por. EA przy rozciąganiu).

G – moduł odkształcenia postaciowego,
moduł ścinania, moduł Kirchhoffa:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad [\text{MPa}]$$

Zadanie 1

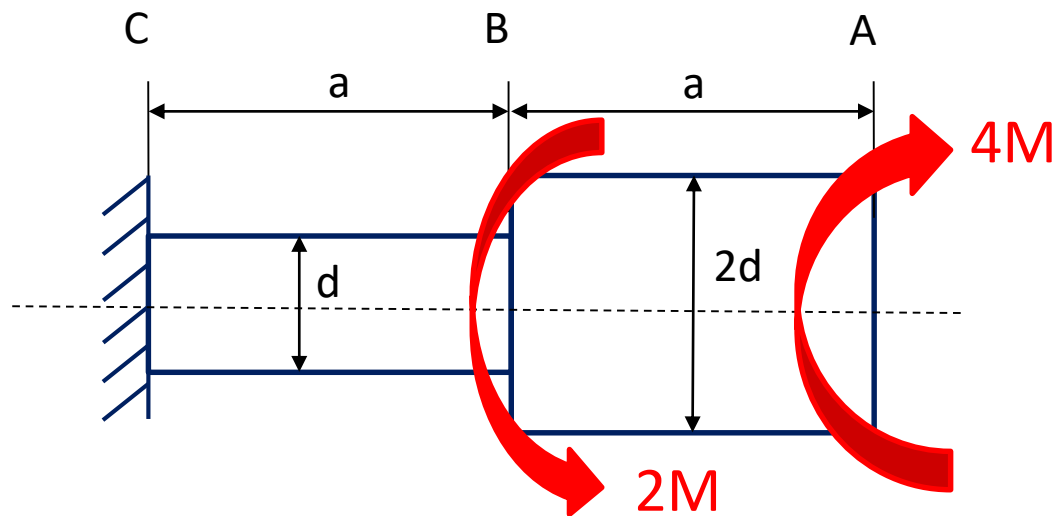
Pręt o przekroju okrągłym jest obciążony jak pokazuje rysunek.

Wykonać dla pręta:

- (1) wykresy wewnętrznego momentu skręcającego M_s ,
- (2) wykresy naprężeń tnących,
- (3) wykresy kąta skręcenia

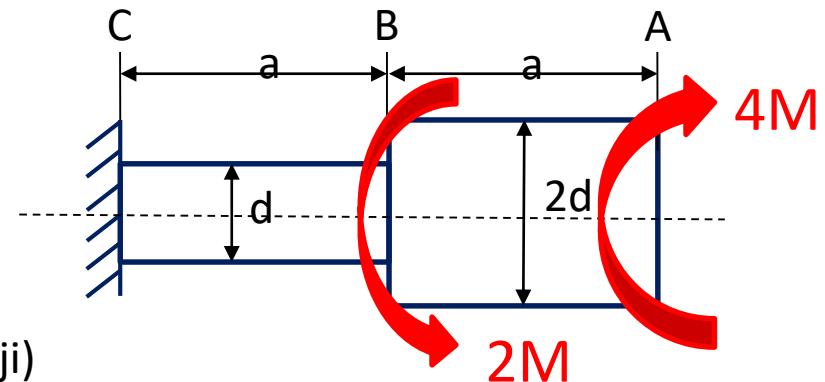
Dane:

$$d=5\text{cm}, M=3\text{kNm}, G=0,8\times 10^5\text{MPa}, a=1\text{m}$$



Procedura rozwiązania

1. **Uwalniamy układ od więzów** (układ współrzędnych, oznaczenie momentów skręcających w podporach)
2. **Równanie równowagi**: suma momentów względem osi wału
3. **Określenie stopnia niewyznaczalności układu**
4. Wyznaczamy **wewnętrzne momenty skręcające** – DEF., myślowe przekroje
5. Wyznaczamy charakterystyki geometryczne (biegunowy moment bezwładności I_0) i wskaźnik na skręcanie W_0
6. Obliczamy **naprężenia tnące**
7. Obliczamy **kąty skręcenia** (zasada superpozycji)
8. Rysujemy wykresy momentów wewnętrznych, naprężeń i kątów skręceń



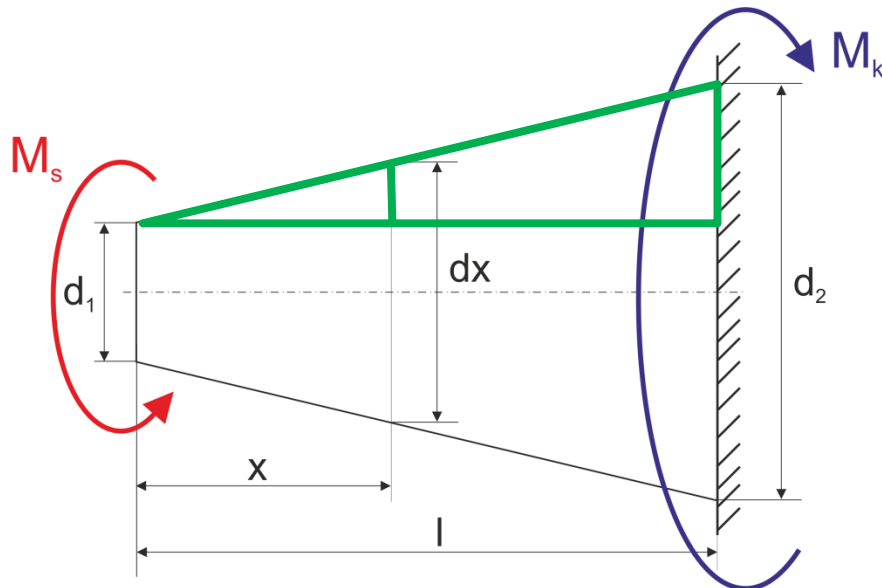
Kąt skręcenia pręta o przekroju zmiennym

$$0 \leq x \leq l$$

Z Twierdzenia TALESA otrzymujemy:

$$\frac{\frac{d_2 - d_1}{2}}{l} = \frac{\frac{d_x - d_1}{2}}{x}$$

$$dx = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} x$$



Moment skręcający M_s jest stały na całej długości

Kąt skręcenia w przekroju x

$$\varphi_x = \frac{M_s x}{G I_0(x)}$$

$$\varphi_x = \frac{M_s x}{G I_0(x)}$$

Całkujemy obustronnie:

$$\varphi = \frac{M_s}{G} \int_0^l \frac{dx}{I_0(x)}$$

$$\varphi = \frac{M_s}{G} \int_0^l \frac{32 \cdot dx}{\pi \cdot dx^4}$$

$$I_0(x) = \frac{\pi dx^4}{32} = \frac{\pi}{32} \left[d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} x \right]^4$$

$$\varphi = \frac{32 \cdot M_s}{\pi \cdot G} \int_0^l \left[d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} x \right]^{-4} dx$$

Podstawiając: $t = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} x$ dla $d_1 \leq t \leq d_2$

Różniczkując obustronnie po zmiennej t i x :

$$dt = \frac{d_2 - d_1}{l} dx$$

Mamy więc:

$$\varphi = \frac{32 \cdot M_s}{\pi \cdot G} \frac{l}{d_2 - d_1} \int_{d_1}^{d_2} \frac{dt}{t^4}$$

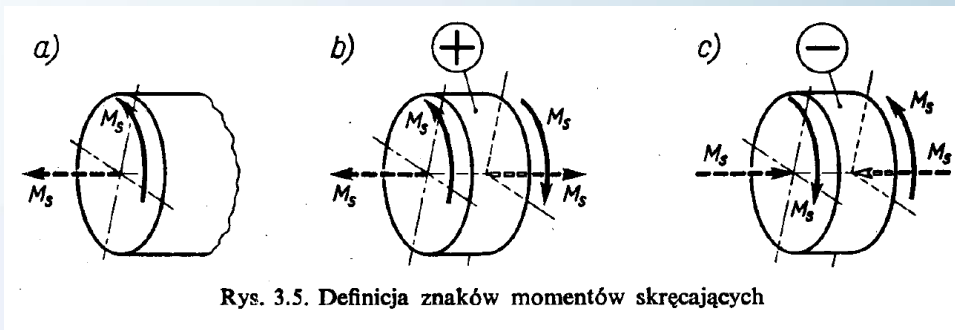
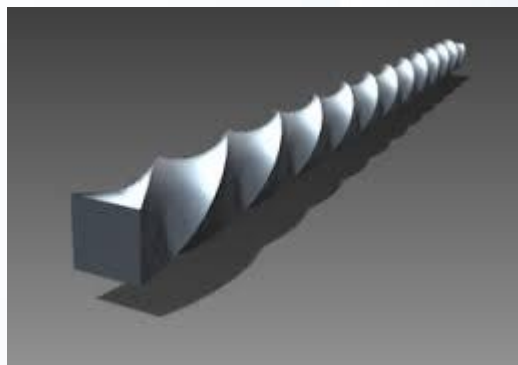
Po scałkowaniu otrzymujemy:

$$\varphi = \frac{32 \cdot M_s}{\pi \cdot G} \frac{l}{d_2 - d_1} \left[\frac{t^{-3}}{3} \right]_{d_1}^{d_2} = \frac{32 \cdot M_s \cdot l}{3 \cdot \pi \cdot G} \cdot \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1^3 \cdot d_2^3}$$

$$\varphi = \frac{32 \cdot M_s \cdot l}{3 \cdot \pi \cdot G} \cdot \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1^3 \cdot d_2^3}$$



POLITECHNIKA POZNAŃSKA



Wirnik główny
pręt obciążony **ciągłym**
momentem skręcającym
wzdłuż promienia

Max. moment
skręcający

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ
Zapraszam ponownie 😊