POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wykład NR6 v. 4.0

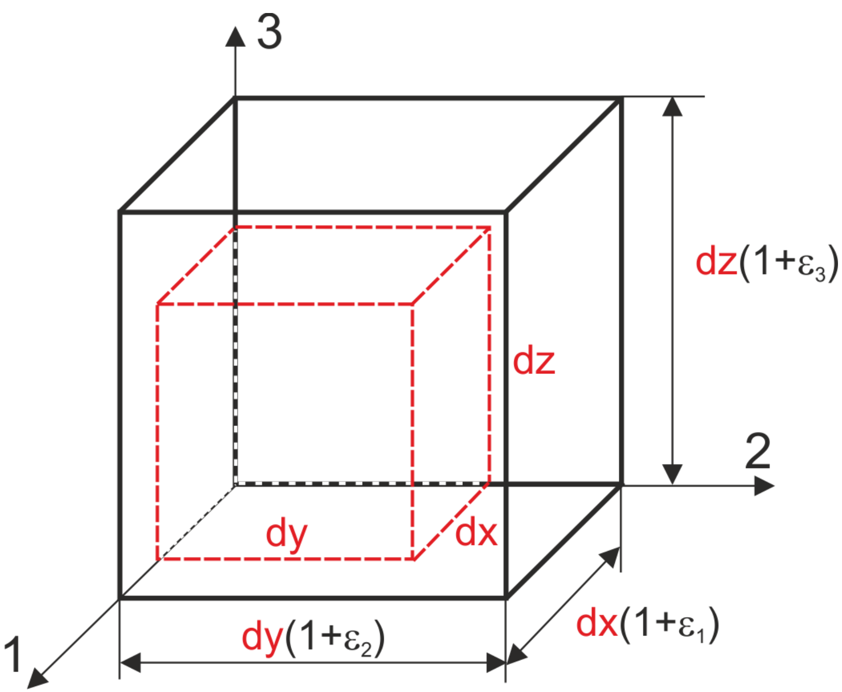
ANALIZA STANU ODKSZTAŁCEŃ

dr hab. inż. Piotr PACZOS

Politechnika Poznańska,
Instytut Mechaniki Stosowanej,
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Odkształcenie objętościowe i postaciowe:

Odkształcenie objętościowe :



1. Objętość elementu – przed odkształceniem:

$$V = dxdydz$$

2. Objętość elementu – po odkształceniu:

$$V' = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)dxdydz$$

3. Względna zmiana objętości elementu:

$$\Theta = \frac{V'-V}{V} = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)-1$$

(nieskończenie mała kostka materialna)

$$\Theta = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - 1$$

Pomijając małe wyższego rzędu otrzymujemy, w kierunkach głównych:

$$\Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

W kierunkach normalnych, dowolnych:

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Odkształcenie średnie:

$$\varepsilon_{sr} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \longrightarrow \Theta = 3\varepsilon_{sr}$$

W ogólnym przypadku stan odkształcenia jest określony przez 6 niezależnych składowych tensora odkształcenia:

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ - odksztacenie względne

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ - kąt odksztacenia postciowego

(zmiana kątów pomiędzy krawędziami elementów)

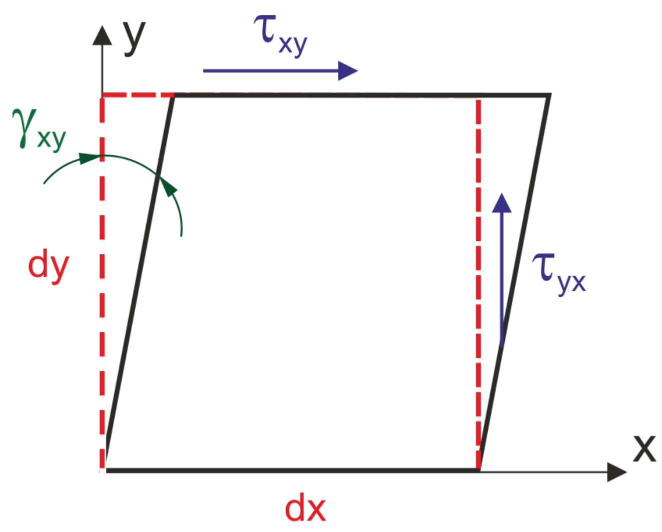
Zmiana postaci, to zmiana kąta pomiędzy krawędziami odkształcenia postaciowego:

Wprowadzamy:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{sr} + \left(\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}\right)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{sr} + \left(\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}\right)$$

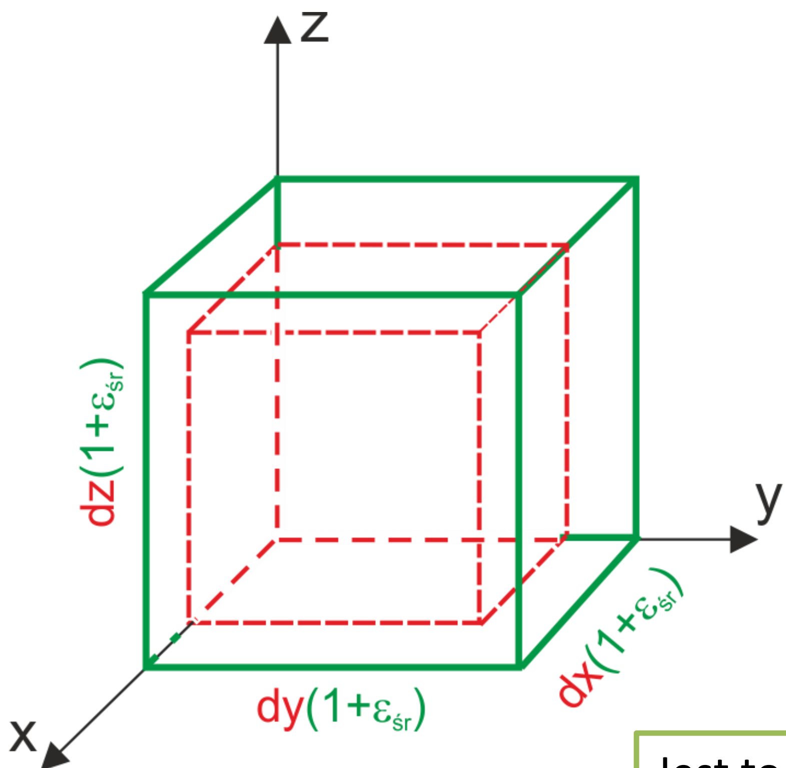
$$\varepsilon_z = \varepsilon_{sr} + \left(\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}\right)$$



Ogólny kształt odkształcenia możemy rozłożyć na dwa nakładające się na siebie stany: (1) stan czysto objętościowy i (2) stan postaciowy

(1) Stan objętościowy, ponieważ:

$$\Theta^{(1)} = 3\varepsilon_{sr} = 3\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \Theta$$



Ponieważ pozostałe składowe stanu odkształcenia $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ wpływają jedynie na zmianę postaci (zmiana kąta nachylenia pomiędzy krawędziami) odkształcenie więc jest czysto postaciowe

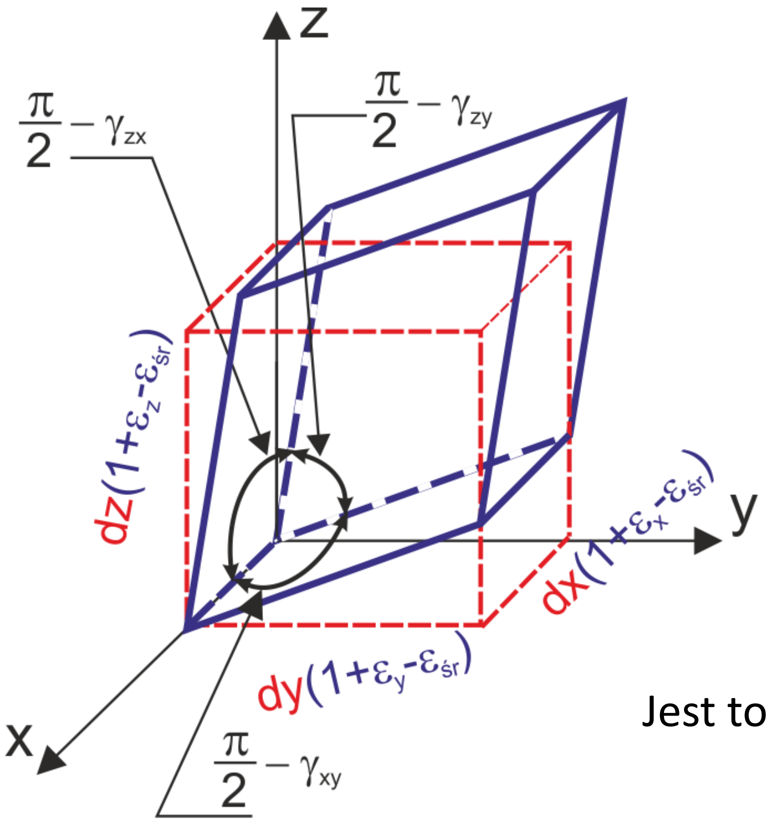
W tym przypadku tensor odkształcenia ma postać:

$$T_\varepsilon^{(1)} = T_\varepsilon^{o} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{sr} \end{bmatrix}$$

Jest to tzw. kulisty wektor odkształcenia, gdzie $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{sr}$ (kula w przestrzeni)

(2) Stan postaciowy, ponieważ

$$\Theta^{(2)} = \left(\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}\right)\left(\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}\right)\left(\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}\right) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\varepsilon_{sr} = 0$$



W tym przypadku tensor odkształcenia ma postać:

$$D_\varepsilon^{(2)} = D_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{sr} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{sr} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{sr} \end{bmatrix}$$

Jest to tzw. dewiator odkształcenia, stąd

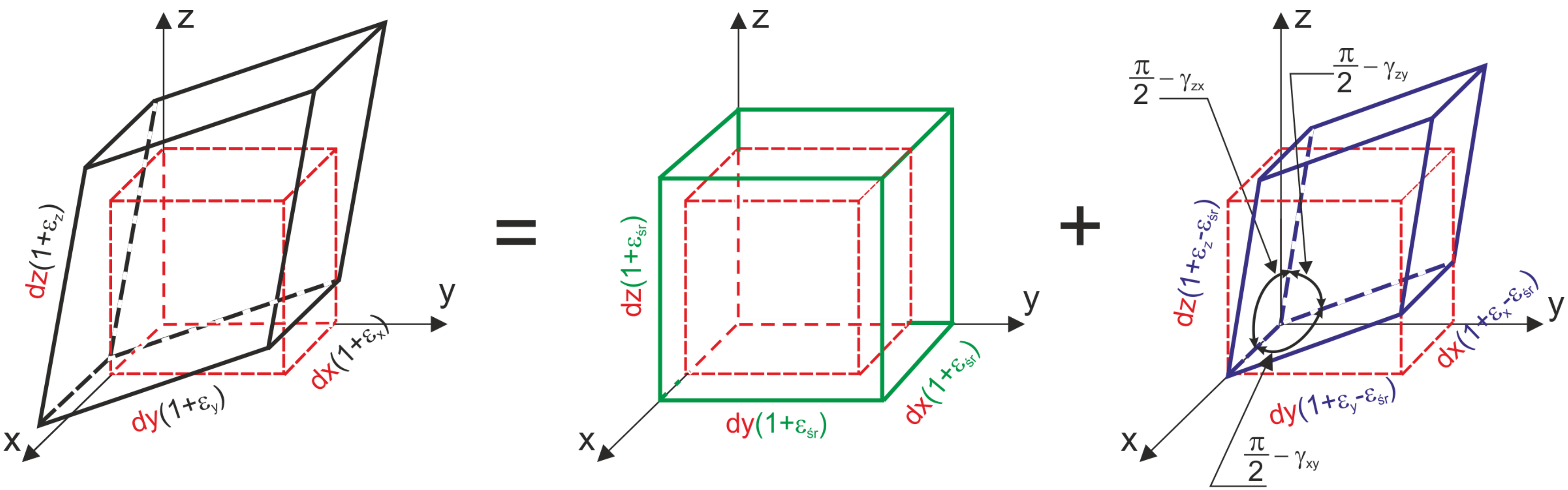
$$T_\varepsilon = T_\varepsilon^o + D_\varepsilon$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

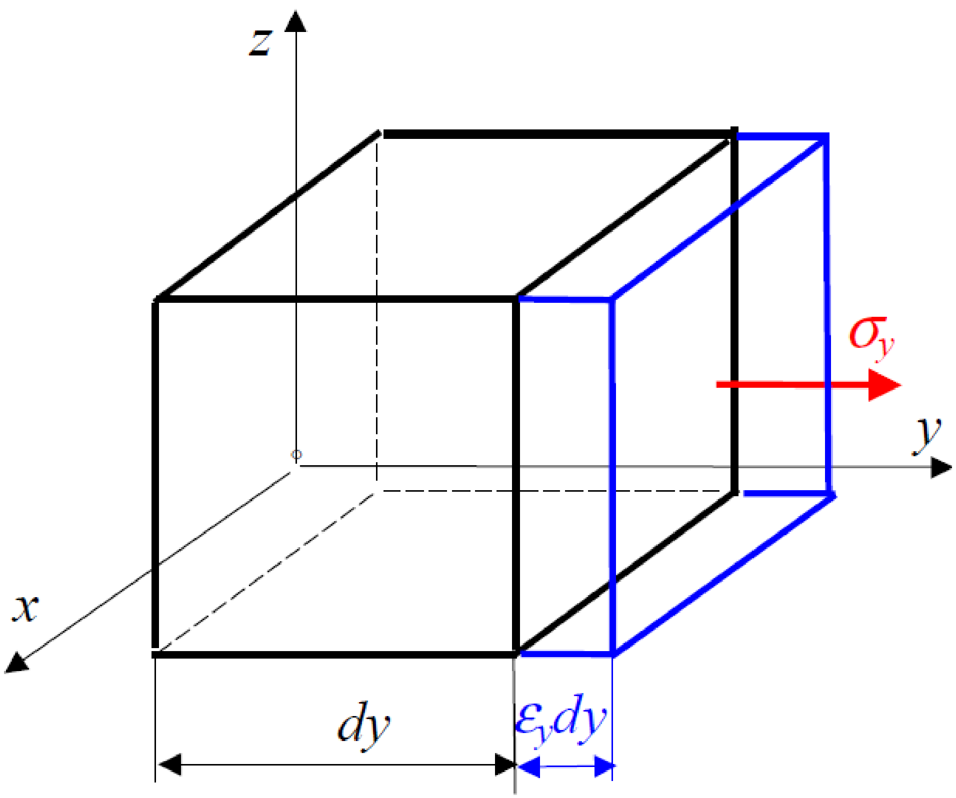
ODKSZTAŁCENIE

ODKSZTAŁCENIE OBJĘTOŚCIOWE

ODKSZTAŁCENIE POSTACIOWE

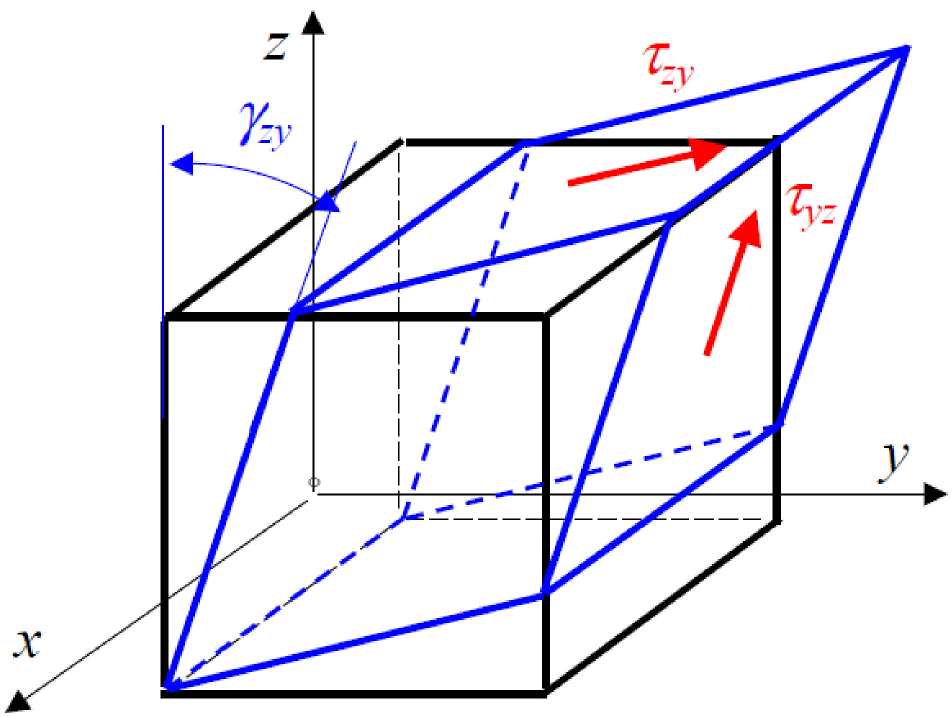


Odkształcenie OBJĘTOŚCIOWE:



$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y$$

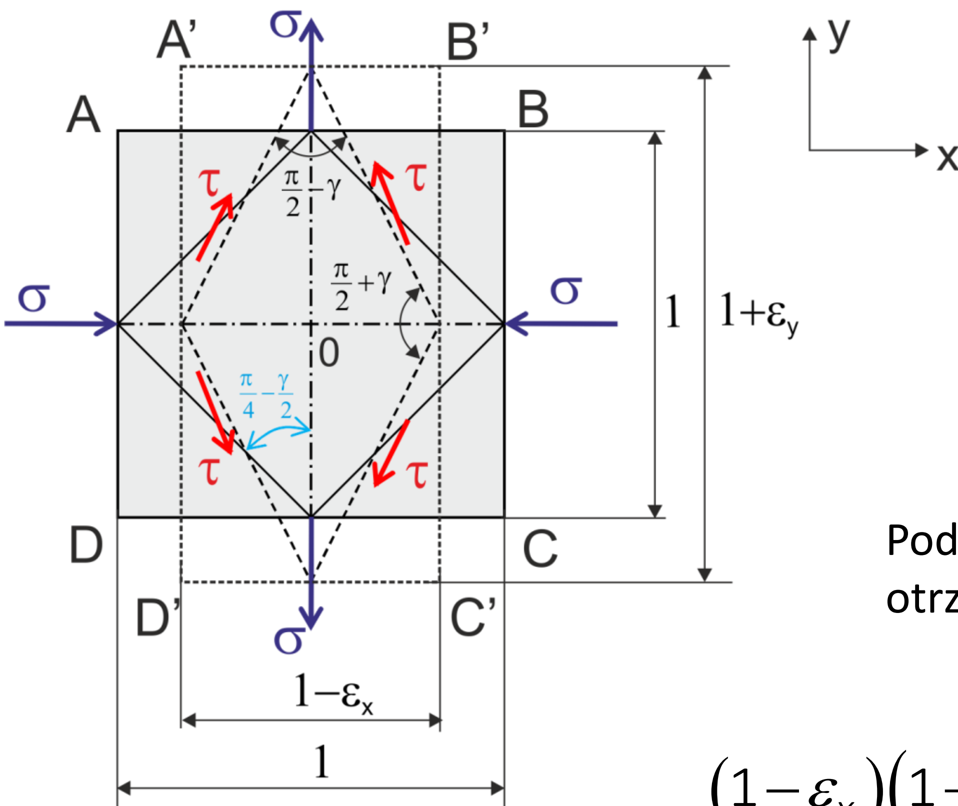
Odkształcenie POSTACIOWE:



$$\gamma_{zy} = 2\frac{1+\nu}{E}\tau_{zy}$$

Odkształcenie płaskie – czysto postaciowe:

$$\varepsilon_z = 0$$



Przyrost objętości elementu wynosi:

$$\Theta = \frac{V' - V}{V} = \Delta V$$

$$\Delta V = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) - 1$$

Podstawiając: $\varepsilon_z = 0$ oraz $\varepsilon_x = -\varepsilon_x$
otrzymujemy:

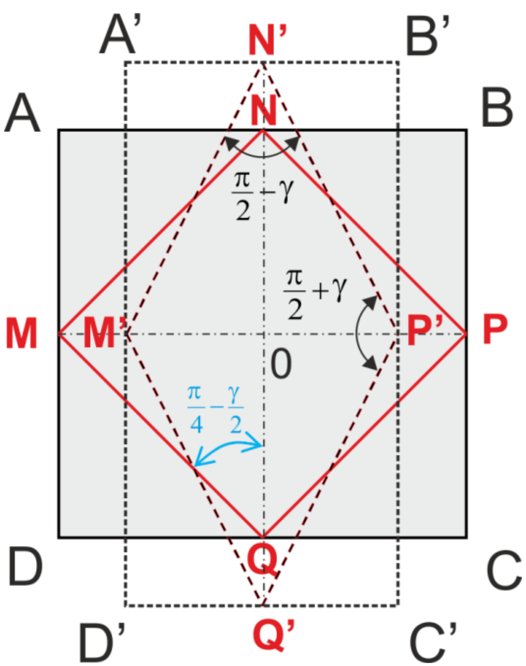
$$(1-\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y) = 1 \quad \text{lub} \quad -\varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_x \varepsilon_y = 0$$

Pomijając iloczyny (małe wyższego rzędu) uzyskujemy:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$$

Z trójkąta N'0P' otrzymujemy:

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1-\varepsilon_x}{1+\varepsilon_y} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$$



Z zależności trygonometrycznych wynika:

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\gamma}{2}}{1 + tg\frac{\pi}{4} tg\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - tg\frac{\gamma}{2}}{1 + tg\frac{\gamma}{2}}$$

Ponieważ γ jest małym kątem to możemy zastąpić: $tg\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\gamma}{2}$

Mamy wówczas:

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}$$

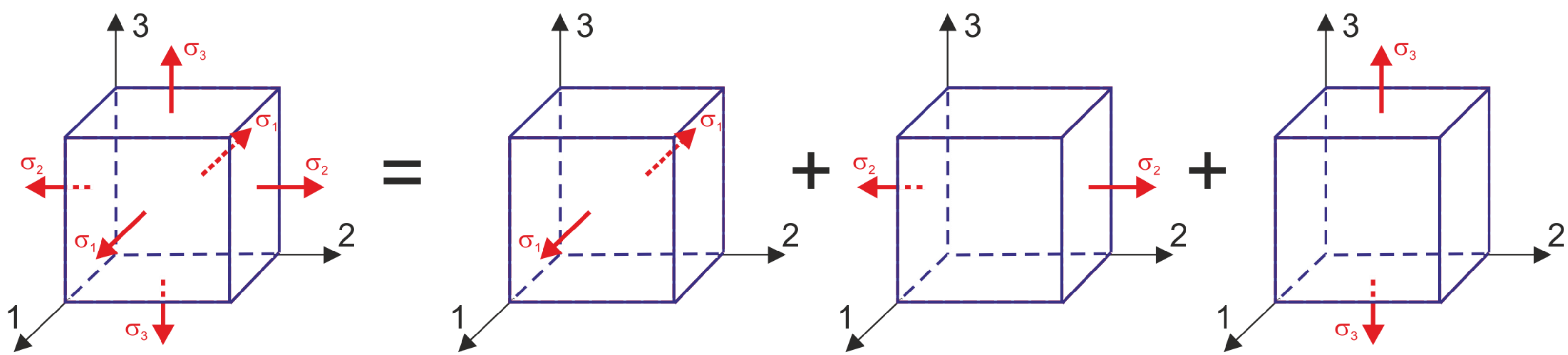
$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} \quad \rightarrow \quad \gamma = 2\varepsilon$$

Kąt odkształcenia postaciowego:

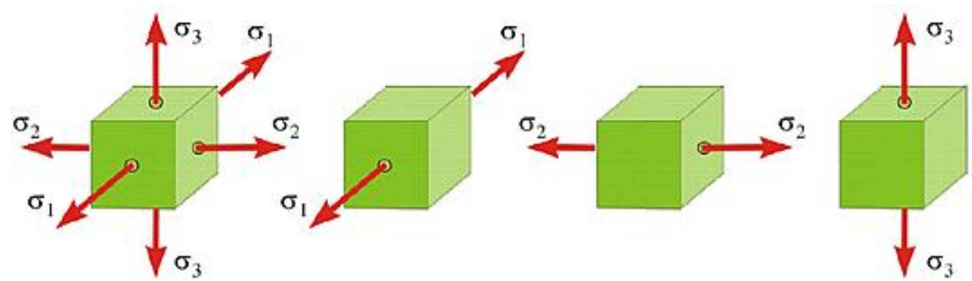
$$\boxed{\gamma = 2\varepsilon}$$

Związki pomiędzy naprężeniami o odkształceniami:

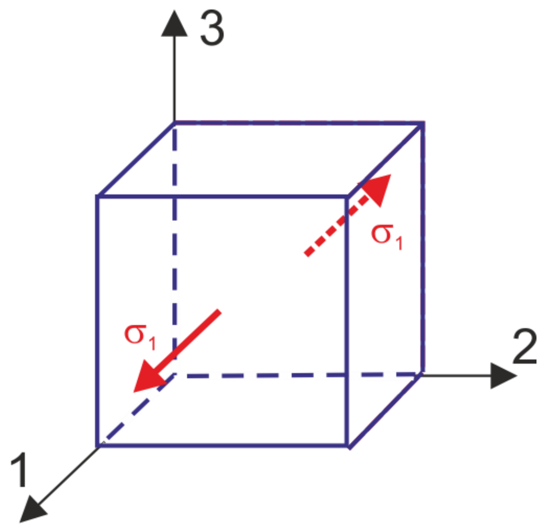
Wzajemne zależności pomiędzy składowymi stanu naprężenia i odkształcenia:
(związki FIZYCZNE)



Kostki o wymiarach jednostkowych:



POLITECHNIKA POZNAŃSKA



$$\sigma = \frac{N}{A} \qquad \sigma = E\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\nu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\text{poprzeczne}}{\text{podłużne}}\right|$$

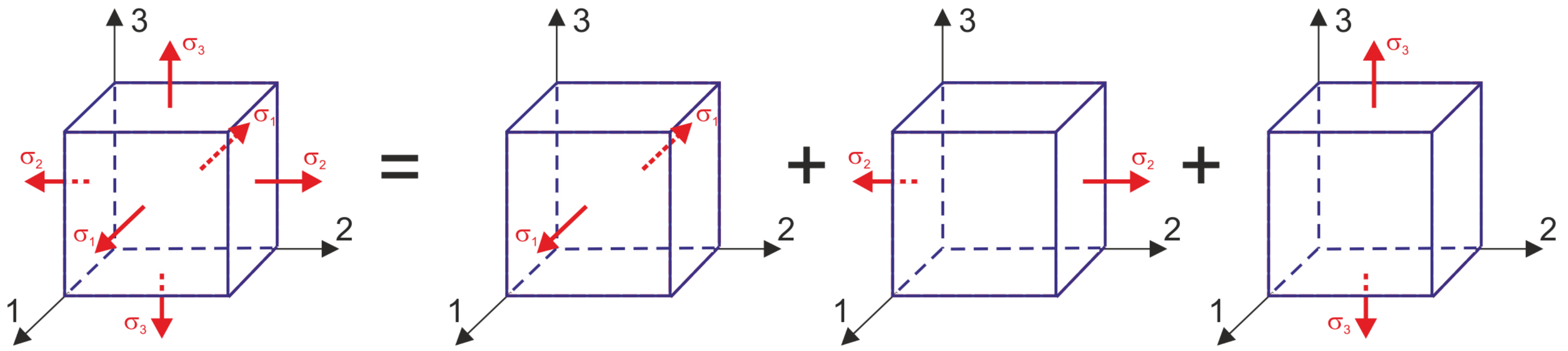
$$\varepsilon' = \varepsilon_{pop} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{pop} = -\nu\varepsilon$$

Dla ogólnego przypadku odkształcenie dla σ_1

$$\boxed{\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E},}$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Dla ogólnego przypadku odkształcenie dla σ_1



$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E}$$

Pierwszy związek fizyczny dla stanu trójosiowego

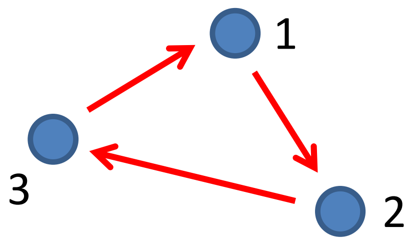
$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E},$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E},$$
$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \nu\frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right],$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\right],$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right],$$

Uogólnione Prawo Hooke'a

Takie same zależności zachodzą również w trzech dowolnych, ale wzajemnie prostopadłych kierunkach *x*, *y*, *z*.

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right],\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right],\\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right],\end{aligned}}$$



Odkształcenie wyrażone za pomocą naprężeń !!!

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Rozwiązując powyższy układ równań, ze względu na naprężenia otrzymujemy

Uogólnione Prawo Hooke'a dla naprężeń głównych

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Rozwiązując powyższy układ równań, ze względu na naprężenia otrzymujemy:

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\Theta\right], \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}\Theta\right], \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\Theta\right], \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\left(\varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right], \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\left(\varepsilon_x + \varepsilon_z\right)\right], \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)\right], \end{aligned}}$$

Dla płaskiego stanu naprężenia: $\sigma_z = 0$, ale $\varepsilon_z \neq 0$!!!

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right], \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right], \end{aligned}} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y\right], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_x\right], \\ \varepsilon_z &= -\frac{1}{E}\left[\nu\sigma_x + \nu\sigma_y\right], \end{aligned}}$$

Dla płaskiego stanu odkształcenia: $\varepsilon_z = 0$, ale $\sigma_z \neq 0$!!!

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y\right], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_x\right], \end{aligned}} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right], \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right], \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right], \end{aligned}}$$

Rozważmy przypadek czystego ścinania:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma,\\ \sigma_y &= -\sigma,\\ \sigma_z &= 0,\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y\right] = \frac{1+\nu}{E}\sigma\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_x\right] = -\frac{1+\nu}{E}\sigma\\ \varepsilon_z &= 0\end{aligned}}$$

Mamy w tym przypadku do czynienia z czystym odkształceniem postaciowym, następuje zmiana długości krawędzi, ale nie objętości.

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$ - zmiana objętość

$$\boxed{\gamma = 2\varepsilon}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{2}{E}(1+\nu)\sigma}$$

W przypadku czystego ścinania w przekrojach nachylonych do kierunków głównych pod kątem 45° naprężenia styczne (ścinające) są równe co do wartości bezwzględnej naprężeniem głównym.

$$\sigma = \tau \quad \text{dla} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\gamma = \frac{2}{E}\left(1+\nu\right)\tau$$

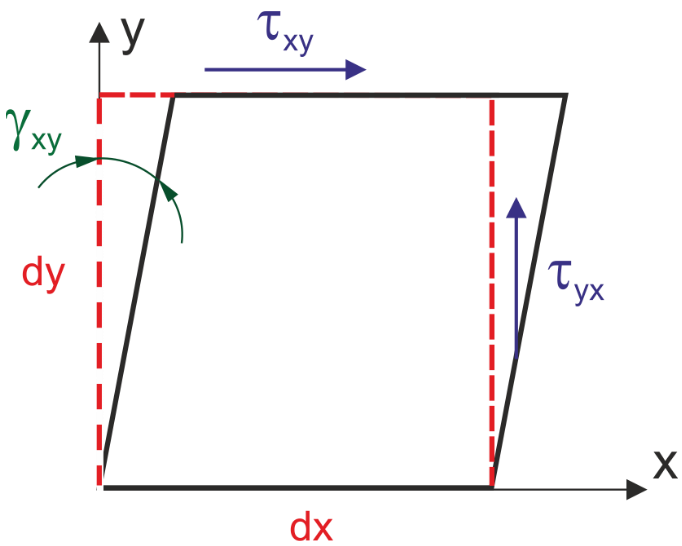
Wprowadzamy wielkość (moduł odkształcenia postaciowego):

$$G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}$$

Moduł Ścinania

E – moduł Younga (moduł sprężystości podłużnej)

$$\boxed{\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{lub} \quad \tau = \gamma G}$$



W trójwymiarowym stanie naprężenia mamy:

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} G,$$
$$\tau_{yz} = \gamma_{yz} G,$$
$$\tau_{xz} = \gamma_{xz} G,$$

Dla płaskiego stanu naprężenia mamy:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right],$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right],$$
$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} G,$$

Dodajemy stronami równanie opisujące trójwymiarowy stan naprężenia:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\Theta\right],$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}\Theta\right],$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\Theta\right],$$

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + 3\frac{\nu}{1-2\nu}\Theta\right)$$

skąd,

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{E}{1-2\nu}\Theta \longrightarrow \frac{\Theta}{3} = \varepsilon_{sr}$$

Po podzieleniu przez 3 obydwu stron równania otrzymujemy:

$$\sigma_{sr} = \frac{E}{3(1-2\nu)}\Theta = \frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_{sr}$$

Wprowadzamy:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$\boxed{\sigma_{sr} = K\Theta}$$

Moduł ściśliwości (moduł odkształcenia objętościowego)

Poniższy wzór określa, tzw. prawo zmiany objętości. Według tego prawa naprężenie średnie jest wprost proporcjonalne do odkształcenia średniego lub do odkształcenia objętościowego.
UWAGA – za zniszczenie materiału odpowiada odkształcenie postaciowe (NIE OBJETOŚCIOWE)

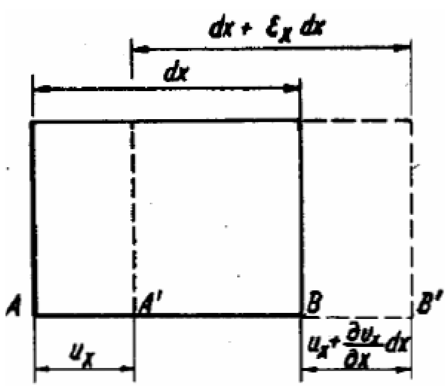
Hipoteza HUBERA

Materiały pomocnicze do wykładu z Wytrzymałości Materiałów.
Wersja elektroniczna, http://www.okno.pg.gda.pl.

- **interpretacja składowych odkształceń**

- **interpretacja** ε_x

  - odkształcenie jednostkowe krawędzi AB

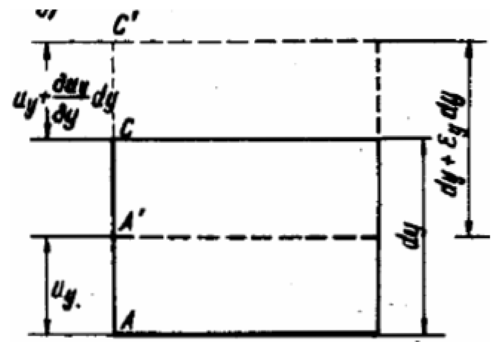


$$\varepsilon_x \stackrel{def}{=} \frac{A'B' - AB}{AB}$$

$$= \frac{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x}\mathrm{d}x - u_x}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

- **interpretacja** ε_y

  - odkształcenie jednostkowe krawędzi AC

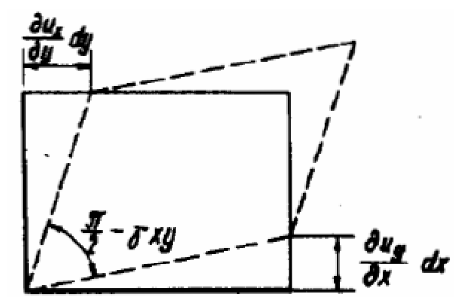


$$\varepsilon_y \stackrel{def}{=} \frac{A'C' - AC}{AC}$$

$$= \frac{u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y}\mathrm{d}y - u_y}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

- **interpretacja** $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$

  - kąt odkształcenia postaciowego (spaczenie), zmiana kąta między ściankami

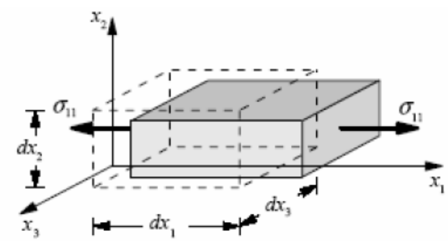


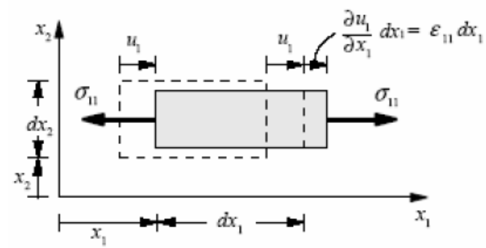
$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} = 2\varepsilon_{xy}$$

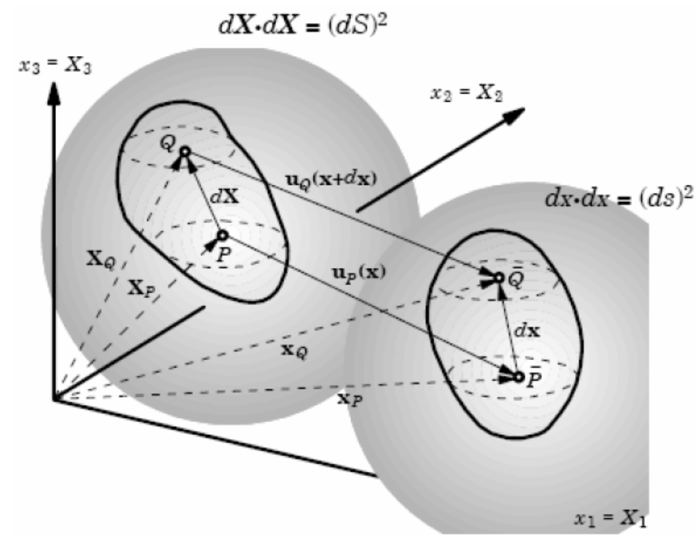
$$= \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

interpretacja składowych odkształceń przestrzennych

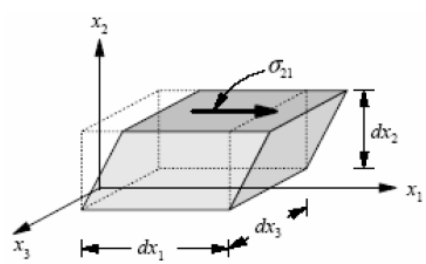
- rozciągnięcia

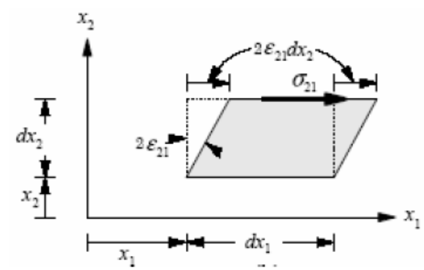






- odkształcenia postaciowe





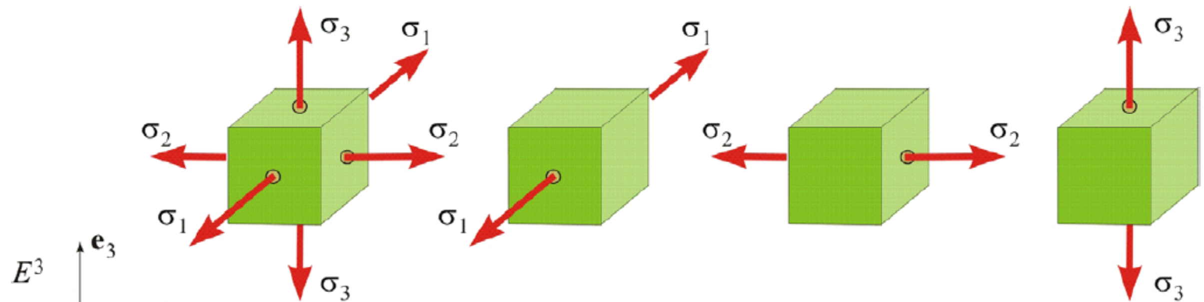
- **energetyczne sprzężenie** tensorów odkształceń i naprężeń poprzez pracę

$$\textit{gęstość pracy wewnętrznej} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij},$$

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \tfrac{1}{2}\left(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i\right),\ i,j = 1,2,3.$$

Uogólnione prawo Hooke'a

stan przestrzenny 3D



$$\varepsilon_1 = +\frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E}$$

postać skalarna

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)),$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)),$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G},$$

i odwrotna:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)]$$

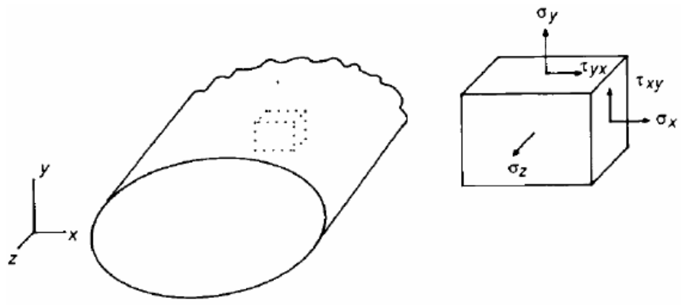
$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)]$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}.$$

Ugólnione prawo Hooke'a

PSO



nieskończenie długa konstrukcja w kierunku z

$$\varepsilon_z=\gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0$$

postać skalarna

$\varepsilon_z=0$ (założenie), $\Rightarrow$

$$\varepsilon_x=\frac{1}{2G}[(1-\nu)\sigma_x-\nu\sigma_y],$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{2G}[(1-\nu)\sigma_y-\nu\sigma_x],$$

$$\tau_{xy}=G\gamma_{xy},$$

i odwrotna:

$$\sigma_z=\nu(\sigma_x+\sigma_y)=\frac{2G\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y),$$

$$\sigma_x=\frac{2G}{1-2\nu}[(1-\nu)\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y],$$

$$\sigma_y=\frac{2G}{1-2\nu}[(1-\nu)\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x],$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G},$$

postać macierzowa $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbb{E}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$

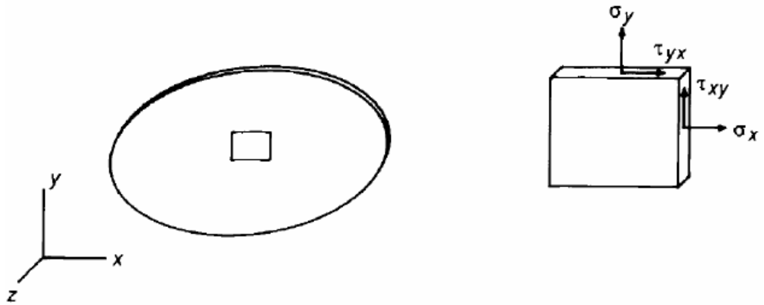
$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2G}\begin{bmatrix}1-\nu & -\nu & 0\\ -\nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix},$$

i odwrotna $\boldsymbol{\sigma}=\mathbb{E}\,\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{2G}{1-2\nu}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}.$$

Uogólnione prawo Hooke'a

PSN



tarcza w płaszczyźnie $x-y$

$\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$

postać skalarna

$$\varepsilon_z=-\nu(\varepsilon_x+\varepsilon_y)=-\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y),$$

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y),$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x),$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G},$$

$\Leftarrow$

i odwrotna:

$\sigma_z=0$ (założenie),

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y),$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x),$$

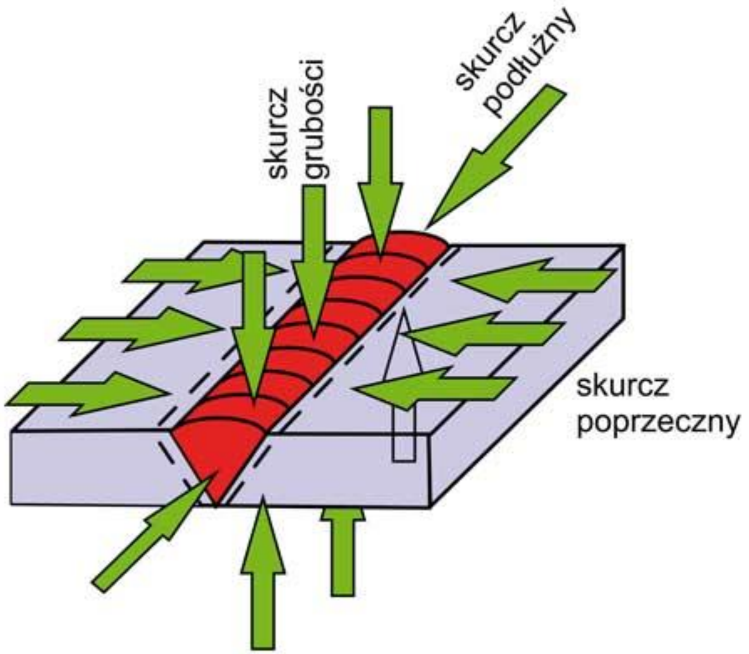
$$\tau_{xy}=G\gamma_{xy},$$

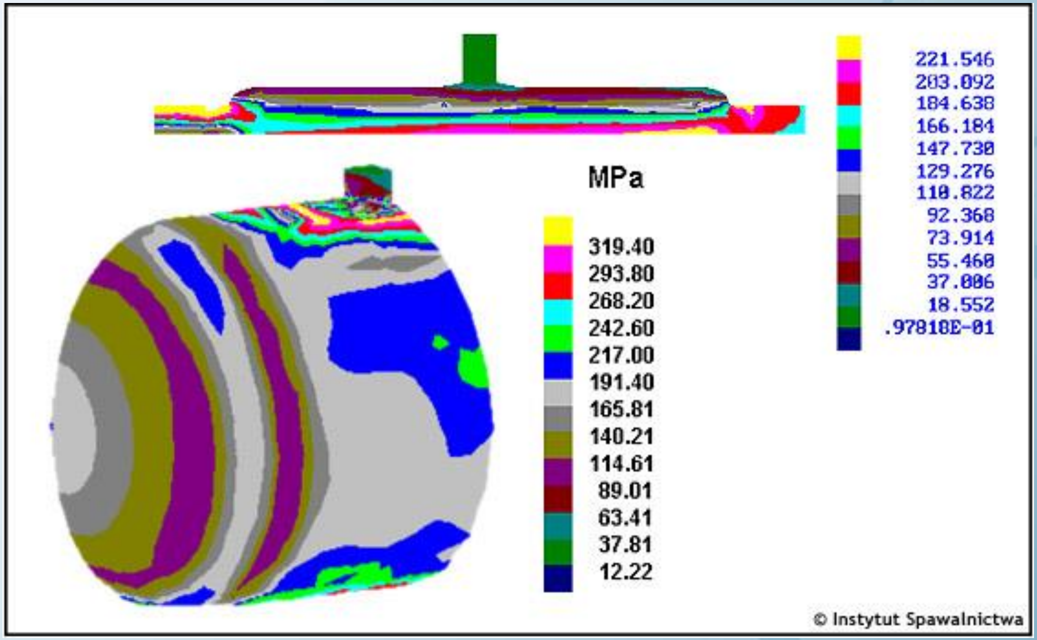
postać macierzowa $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbb{E}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & 0\\ -\nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\nu)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix},$$

i odwrotna $\boldsymbol{\sigma}=\mathbb{E}\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}.$$


skurcz grubości
skurcz podłużny
skurcz poprzeczny


MPa
319.40
293.80
268.20
242.60
217.00
191.40
165.81
140.21
114.61
89.01
63.41
37.81
12.22
221.546
203.092
184.638
166.184
147.730
129.276
110.822
92.368
73.914
55.460
37.006
18.552
.97818E-01
© Instytut Spawalnictwa

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

Zapraszam ponownie ☺