POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wykład NR8 v. 7.0

HIPOTEZY WYTĘŻENIOWE

dr hab. inż. Piotr PACZOS

Politechnika Poznańska,
Instytut Mechaniki Stosowanej,
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

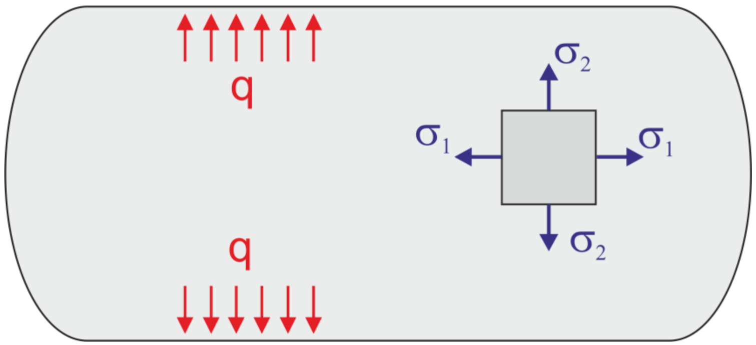
Celem hipotez wytężeniowych jest zbudowanie warunków wytrzymałościowych przy złożonych stanach naprężeń

$$\sigma_{\max\ (rzeczywite)} \leq k$$

Przy prostych stanach naprężeń, np. stan jednoosiowy
k – współczynnik naprężenia dopuszczalnego

IDEA: w złożonym stanie naprężenia trudno jest sformułować wytrzymałość za pomocą próby jednoosiowego rozciągania
Stąd korzystamy z HIPOTEZ WYTRZYMAŁOSCIOWYCH - WYTĘŻENIOWYCH

Załóżmy stan naprężenia, w którym jest więcej niż jedna składowa tensora naprężenia i jest różna od zera



Budujemy funkcję *F*:

$$F\left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\right) = F\left(\sigma_0, \ldots\right)$$

Naprężenia krytyczne przy jednoosiowym rozciąganiu – σ_0

Podstawową przesłanką budowy **hipotez wytężeniowych** przy złożonych stanach naprężeń jest zbudowanie takiej funkcji złożonej układu naprężeń *F*, którą można porównać z wynikami próby **jednoosiowego rozciągania**, gdyż próba ta jest **podstawowa**

Rozwiązując to równanie względem σ_0 otrzymujemy:

$$\sigma_0 = \Omega\left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\right)$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Najczęściej przyjmuje się: $\boxed{\sigma_0 = \sigma_{pl}}$

Granica plastyczności materiału

Tak obliczoną wartość (σ_0) nazywamy **naprężeniem zredukowanym**

$$\boxed{\sigma_{red} = \Omega\left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\right)}$$

Naprężenia dopuszczalne:

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_{nieb}}{n} \rightarrow \frac{\text{naprężenia niebezpieczne (np. granica plastycznosci)}}{\text{wspólczynnik bezpieczeństwa}}$$

Ostatecznie warunek wytrzymałości (dla stanów złożonych) ma postać:

$$\boxed{\sigma_{red} \le \sigma_{dop} \quad \rightarrow \quad \sigma_{dop} = k_r}$$

Wyznaczanie naprężeń zredukowanych to jedno z najtrudniejszych zagadnień wytrzymałościowych, a formułowanie σ_{red} opiera się na hipotezach wytrzymałościowych

I. Hipoteza Największego Naprężenia Normalnego (Saint Venant i Rankin)

W myśl tej hipotezy o stanie naprężenia decyduje największe naprężenie normalne

Warunek tej hipotezy możemy zapisać w postaci:

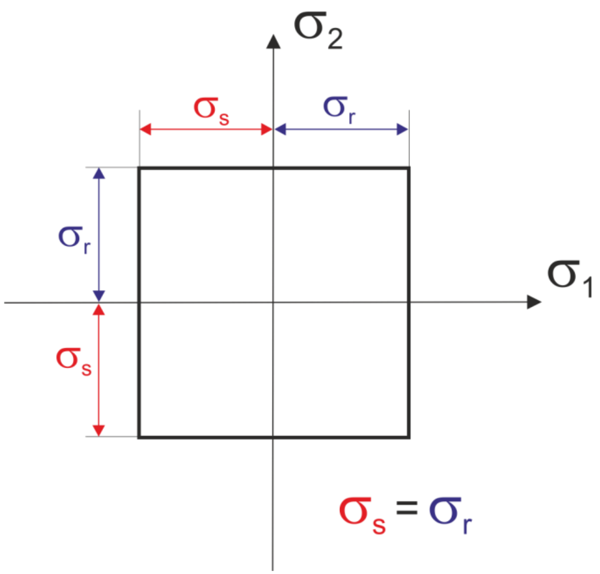
$$\sigma_s < \sigma_1 < \sigma_r$$
$$\sigma_s < \sigma_2 < \sigma_r$$
$$\sigma_s < \sigma_3 < \sigma_r$$

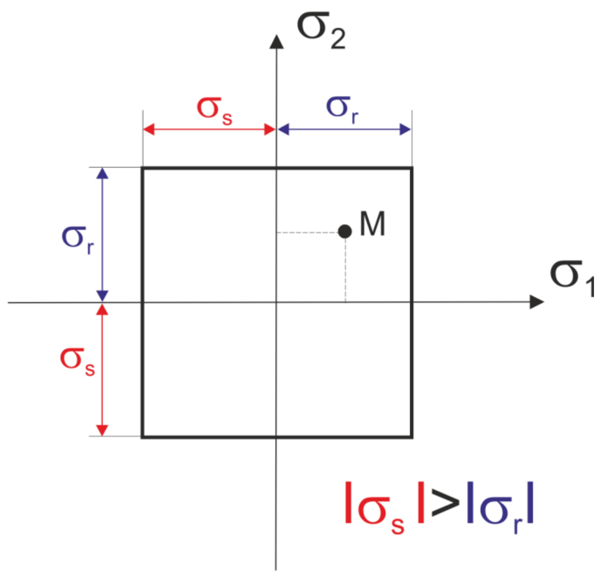
σ_s – naprężenie odpowiadające granicy wytrzymałości przy jednoosiowym ściskaniu
σ_r – naprężenie odpowiadające granicy wytrzymałości przy jednoosiowym rozciąganiu

Jeśli naprężenia te są z określonych przedziałów (bezpieczeństwo!!!)

Najczęstszym przypadkiem jest przypadek dwuosiowy $\sigma_3=0$

$$\sigma_s < \sigma_1 < \sigma_r$$
$$\sigma_s < \sigma_2 < \sigma_r$$





$$\sigma_x \neq 0, \quad \sigma_y \neq 0, \quad \tau_{xy} \neq 0,$$

pozostałe stałe równe zero

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{\max,\min} = \frac{1}{2}\left[\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right]$$

Warunek wytrzymałości przyjmuje postać:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right] \le \sigma_r \\ \frac{1}{2}\left[\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right] \le \sigma_s \end{cases}$$

II. Hipoteza Największego Wydłużenia Właściwego (Hipoteza ε_{max})

W myśl tej hipotezy o stanie niebezpiecznym decyduje największe wydłużenie ε_{max}

Zakładamy, że granicy plastyczności przy prostym rozciąganiu σ_0 odpowiada wydłużenie ε_0

W myśl tej hipotezy o stanie odkształceń decyduje największe wydłużenie

W myśl tej hipotezy będzie spełniona nierówność:

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_0$$
$$\varepsilon_2 < \varepsilon_0$$
$$\varepsilon_3 < \varepsilon_0$$

Odkształcenia w kierunkach głównych

Oznaczając ε_z odkształcenie odpowiadające granicy wytrzymałości przy prostym rozciąganiu, możemy zapisać:

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_z$$
$$\varepsilon_2 < \varepsilon_z$$
$$\varepsilon_3 < \varepsilon_z$$

Stąd:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right],$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\right],$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right],$$

Wydłużania przy jednoosiowym rozciąganiu wynoszą:

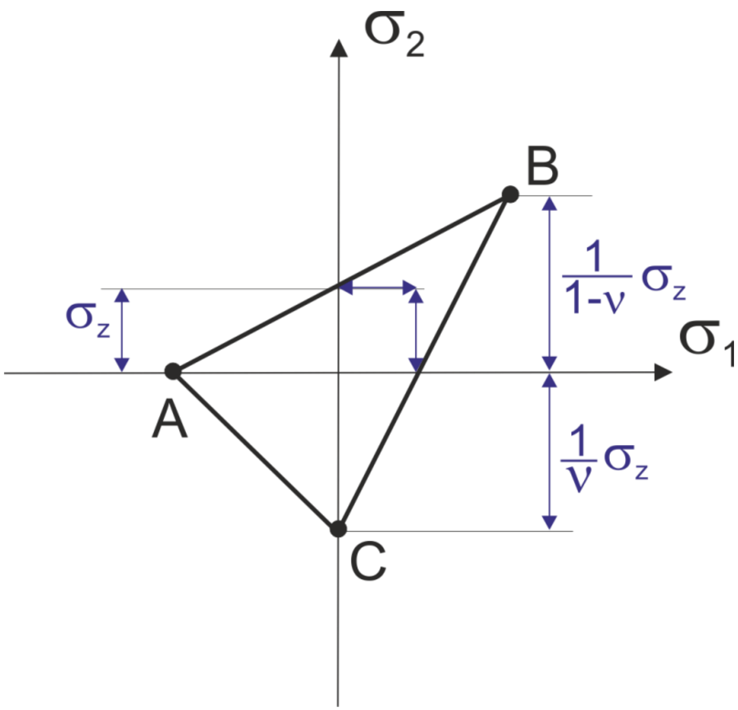
$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E}$$: granica plastycznosci

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$: granica sprężystosci

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) \le \sigma_p \quad \text{lub} \quad \sigma_z$$
$$\sigma_2 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right) \le \sigma_p \quad \text{lub} \quad \sigma_z$$
$$\sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right) \le \sigma_p \quad \text{lub} \quad \sigma_z$$

W stanach dwuosiowych gdy σ_3 =0 mamy:



$$\boxed{\begin{aligned} &\sigma_1 - \nu(\sigma_2) \le \sigma_p \quad :|CB| \\ &\sigma_2 - \nu(\sigma_1) \le \sigma_p \quad :|AB| \\ &-\nu(\sigma_1 + \sigma_2) \le \sigma_p \quad :|AC| \end{aligned}}$$

Dla płaskiego stanu:

$$\boxed{\sigma_x \neq 0, \ \ \sigma_y \neq 0, \ \ \tau_{xy} \neq 0}$$

$$\boxed{\sigma_{1,2} = \sigma_{\max,\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

Podstawiając naprężenia główne σ_1 i σ_2 do nierówności lewe strony będą miały następującą postać:

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Podstawiając naprężenia główne σ_1 i σ_2 do nierówności lewe strony będą miały następującą postać:

$$\frac{1}{2}(1-\nu)(\sigma_x+\sigma_y)+\frac{1+\nu}{2}\sqrt{(\sigma_x+\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2},$$

$$\frac{1}{2}(1-\nu)(\sigma_x+\sigma_y)-\frac{1+\nu}{2}\sqrt{(\sigma_x+\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2},$$

$$\frac{-\nu}{2}(\sigma_x+\sigma_y),$$

Jeżeli przyjmiemy:

$$\sigma_x=\sigma,\ \ \sigma_y=0,\ \ \tau_{xy}=\tau$$

$$\sigma_{red}^{II}=\frac{1-\nu}{2}\sigma+\frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\le k$$

Hipotezy I i II stosuje się do materiałów kruchych

III. Hipoteza Największego Naprężenia Ścinającego (Tresca i Culomb)

W myśl tej hipotezy o stanie niebezpiecznym decyduje największe naprężenie ścinające

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} \qquad \boxed{\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}}$$

τ_{max} -promień Kola Mohra

Dla czystego rozciągania w kierunku σ_{max} mamy:

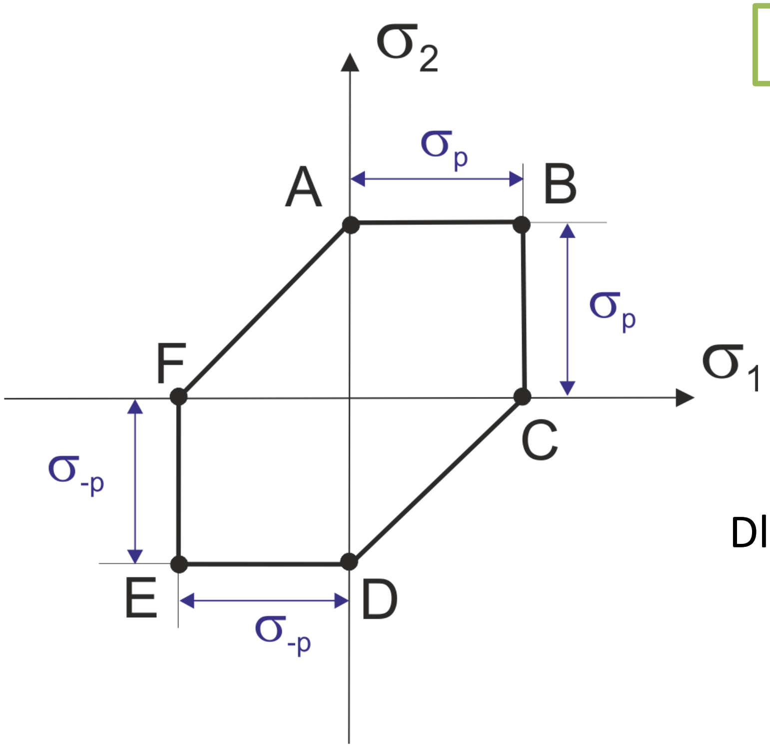
$$\tau_{max} = \tau_{pl} = \frac{\sigma_{pl}}{2} \longrightarrow \sigma_{min} = 0$$

W momencie osiągnięcia granicy plastyczności

Wstawiając σ_{pl} za σ_{red} mamy:

$$\sigma_{red} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$$

$$\boxed{\sigma_{red} \le \sigma_{bezp.}}$$



Dla stanu dwuosiowego, gdy σ_3=0 mamy:

$$\sigma_1 - \sigma_2 \le \pm\sigma_p \quad : |CD| \text{ i } |AF|$$

$$\sigma_2 \le \pm\sigma_p \quad : |AB| \text{ i } |ED|$$

$$\sigma_1 \le \pm\sigma_p \quad : |BC| \text{ i } |EF|$$

Dla płaskiego stanu:

$$\sigma_x \ne 0, \;\; \sigma_y \ne 0, \;\; \tau_{xy} \ne 0$$

Dla płaskiego stanu: $\boxed{\sigma_x \neq 0, \ \ \sigma_y \neq 0, \ \tau_{xy} \neq 0}$

$$\boxed{\sigma_{1,2} = \sigma_{\max,\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

Podstawiając naprężenia główne σ_1 i σ_2 do równości:

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 - \sigma_2 \leq \pm\sigma_p & :|CD| \text{ i } |AF| \\ \sigma_2 \leq \pm\sigma_p & :|AB| \text{ i } |ED| \\ \sigma_1 \leq \pm\sigma_p & :|BC| \text{ i } |EF| \end{array}$$

Otrzymujemy:

$$\boxed{\sigma_{red}^{III} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

Gdy $\sigma_y = 0$: $\boxed{\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

IV. Hipoteza Energii Odkształcenia Postaciowego (Hipoteza Energetyczna HUBERA)

W myśl tej hipotezy o stanie niebezpiecznym decyduje największa energia odkształcenia postaciowego

$$\Phi_f = \frac{1-2\nu}{6E}\left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_x - \sigma_z\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)\right]$$

Φ_f - Energia odkształcenia postaciowego (dla stanu złożonego)

Dla stanu jednoosiowego mamy: $\sigma_x = \sigma \neq 0, \ \ \sigma_y = \sigma_z = 0, \ \ \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0,$

$$\Phi_f^{(j)} = \frac{1+\nu}{6E} 2\sigma^2$$

Porównując $\Phi_f = \Phi_f^{(j)}$ i przekształcając, otrzymujemy:

$$\sigma_{red}^{IV} = \sigma_{red}^{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_x - \sigma_z\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)}$$

lub:

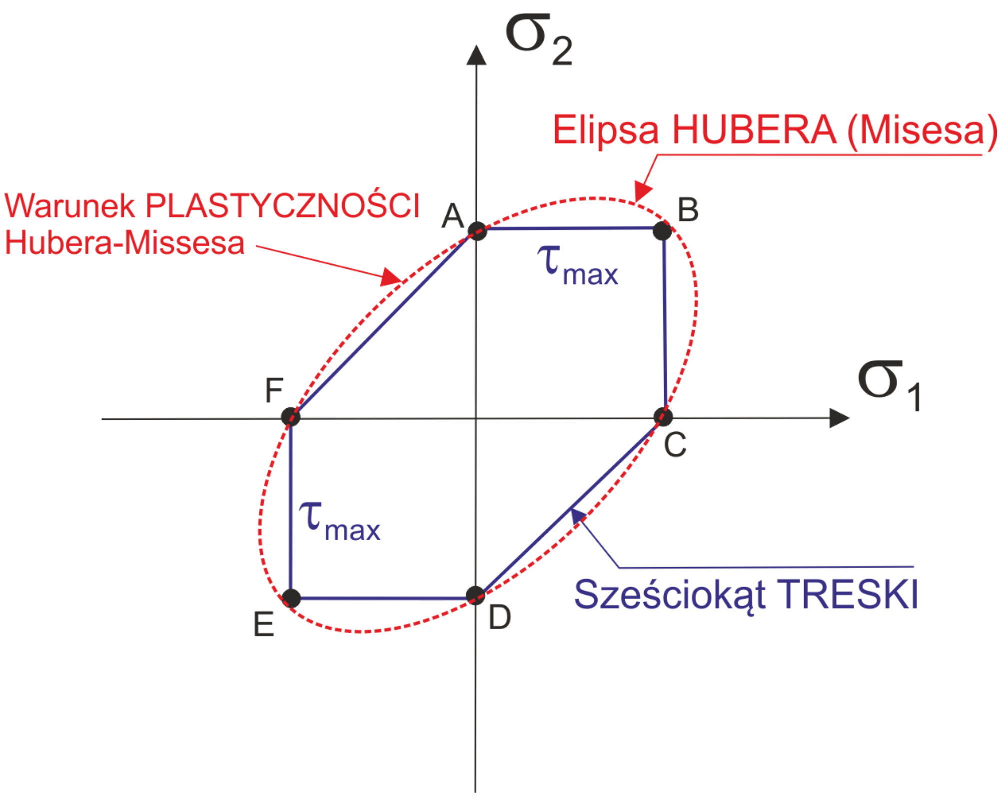
$$\sigma_{red}^{H} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_x\sigma_z + 3\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)}$$

Jeżeli stan naprężenia jest określony przez naprężenia główne:

$$\sigma_{red}^{H} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}$$

Dla podstawowego stanu naprężenia (płaskiego): $\sigma_x \neq 0, \quad \sigma_y \neq 0, \quad \tau_{xy} \neq 0,$

$$\sigma_{red}^{H} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$



Dla stanu jednoosiowego mamy:

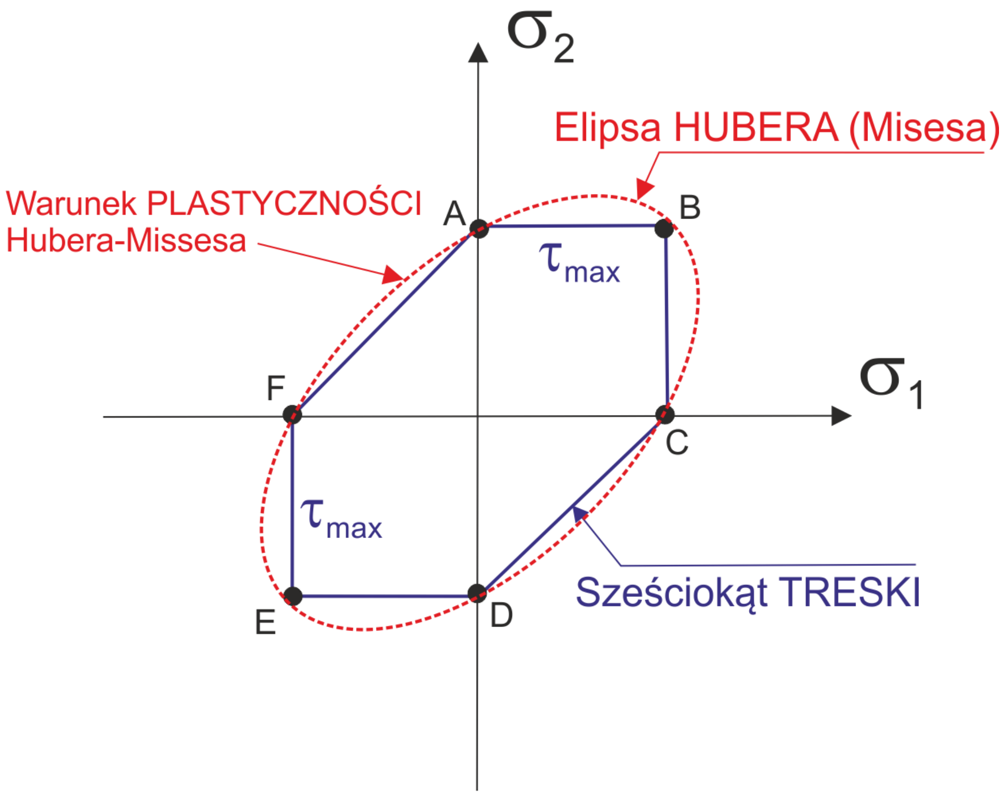
$$\sigma_x = \sigma \neq 0,$$
$$\sigma_y = \sigma_z = 0,$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0,$$

$$\sigma_{red}^{H} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq k_r$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

W przestrzeni 3D naprężeń głównych $\boxed{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$

warunek Hubera przedstawia walec o promieniu $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{pl}$

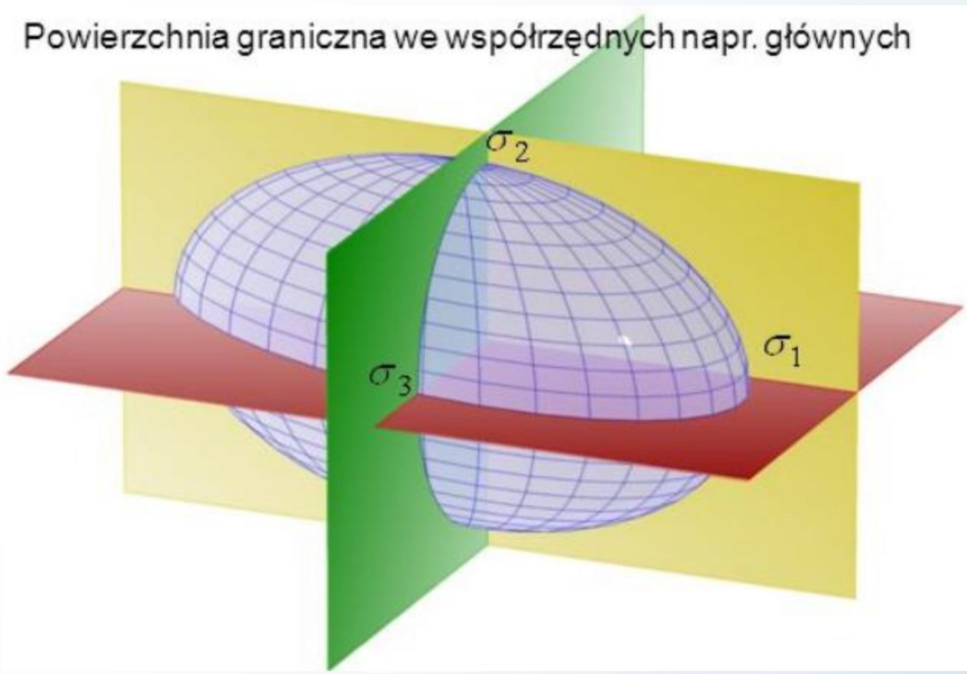


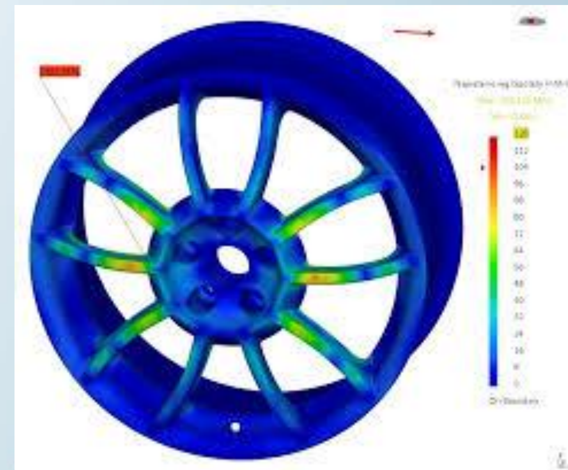
Oś przechodzi przez początek układu współrzędnych i jest jednakowo nachylona do wszystkich osi układu

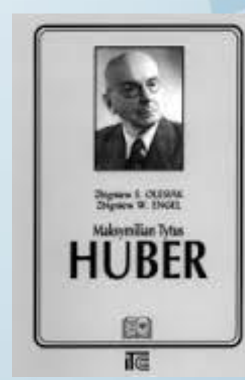
Przy $\boxed{\sigma = 0}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\sigma_{red}^{H} = \sqrt{3}\tau}$

$$\boxed{\tau_{pl} = \frac{1}{1,73} \sigma_{pl} = 0,5776 \sigma_{pl} = 0,58 \sigma_{pl}}$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA







DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

Zapraszam ponownie ☺