



POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wykład NR5 v. 4.0

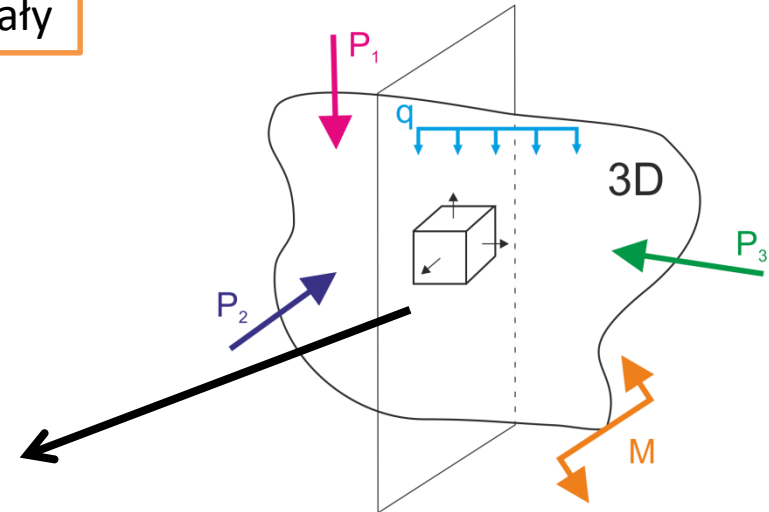
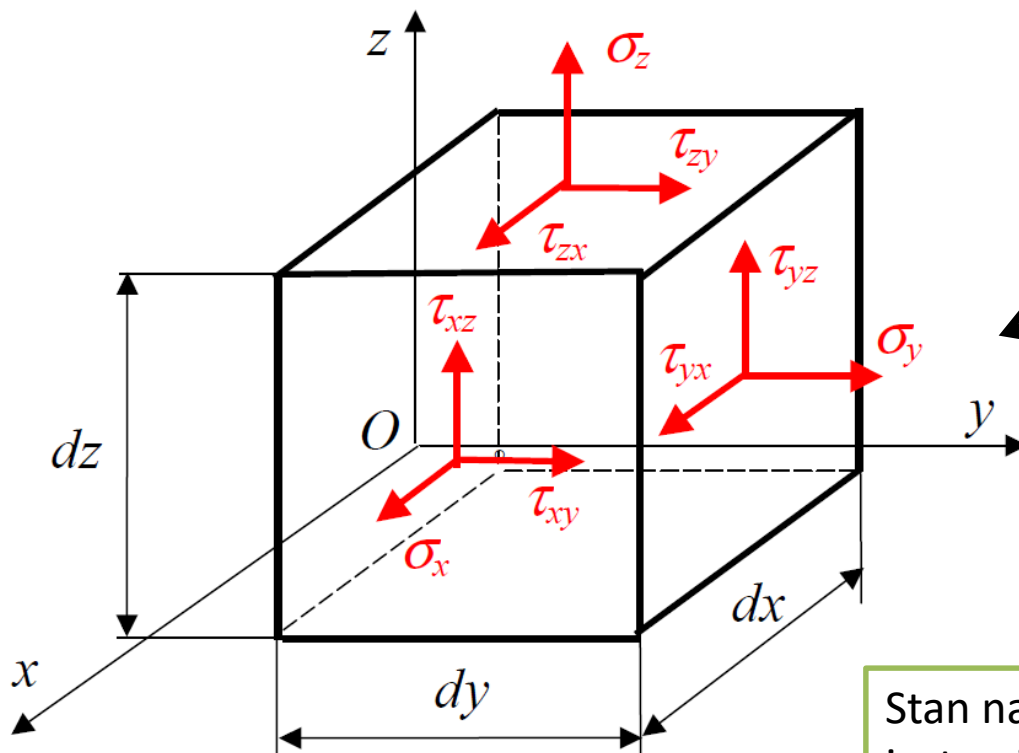
ANALIZA STANU NAPRĘŻEŃ

dr hab. inż. Piotr PACZOS

**Politechnika Poznańska,
Instytut Mechaniki Stosowanej,
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji**

Analiza stanu naprężenia

Element materialny – nieskończenie mały



Stan naprężeń w otoczeniu punktu materialnego jest opisany za pomocą 9 składowych tensora naprężenia



TENSOR: „urządzenie” do pomiaru naprężeń i odkształceń

Definicja tensora II rzędu

Tensorem (drugiego rzędu) nazywamy macierz kwadratową (3^2 współrzędnych), której współrzędne przy obrocie układu współrzędnych transformują się zgodnie z prawem (zwanym prawem transformacji tensorowej):

$$t_{ij} \equiv a_{ik} a_{jl} t_{kl}$$

Gdzie a_{ik} , a_{jl} są dostawami kierunkowymi osi (kosinusami kątów między osiami i - k , j - l , czyli współrzędnymi wersorów osi w układzie współrzędnych). Są elementami macierzy przejścia ze „starego” układu współrzędnych do nowego.

Tensory są niezależne od układu współrzędnych, dlatego przekształcanie na nie nie wpływa, ale składowe tensorów przekształcają się wraz z układem współrzędnych.

Tensor NAPRĘŻENIA:

Układ sił działających na ściankach elementu musi spełniać warunki elementu

$$\sigma_{ij} = T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

6 składowych – naprężenia ścinające

3 składowe – naprężeń głównych (naprężeń normalnych)

Z warunku równowagi momentów wynika symetria tensora (macierzy) naprężenia, a więc jego składowych stycznych

$$\sum M_{x'} = 0: \quad (\tau_{yz} dx dz) dy - (\tau_{zy} dy dx) dz = 0$$

$$dx \cdot dy \cdot dz = dV$$

Podobnie z równań:

$$\sum M_{y'} = 0 \rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\sum M_{z'} = 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

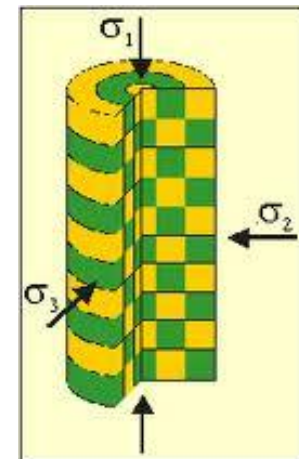
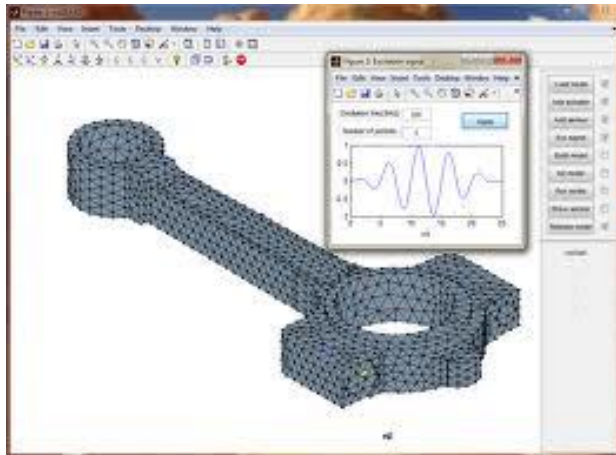
Moment Siły

Wynika z tego, że stan naprężeń w otoczeniu punktu materialnego jest opisany za pomocą 6 niezależnych składowych stanu naprężenia:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - naprężenia normalne

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ - naprężenia styczne (scinające)

Jeżeli wszystkie 6 składowych jest różne od zera, to mówimy o ogólnym stanie trójosiowym naprężenia – **OGÓLNY TRÓJOSIOWY STAN NAPRĘŻENIA**



Jeżeli $\sigma_x \neq 0, \sigma_y \neq 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} \neq 0$
to mówimy o **płaskim stanie** lub **dwuosiowym stanie naprężenia**



$$\sigma_{ij} = T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

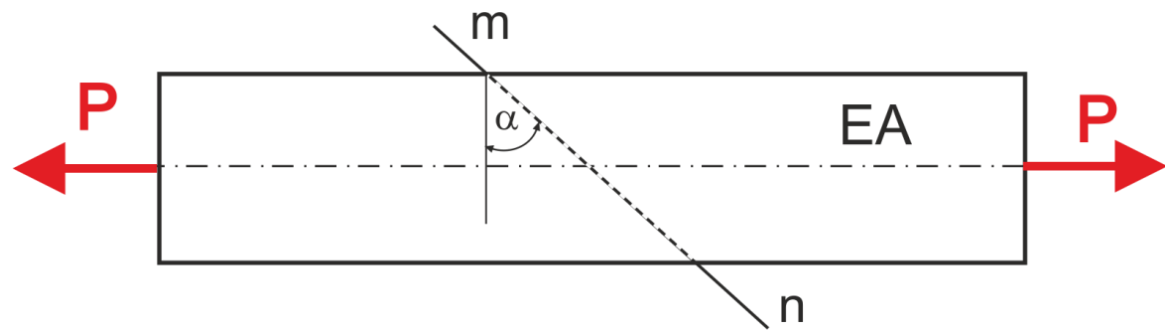


Jednoosiowy STAN NAPRĘŻENIA

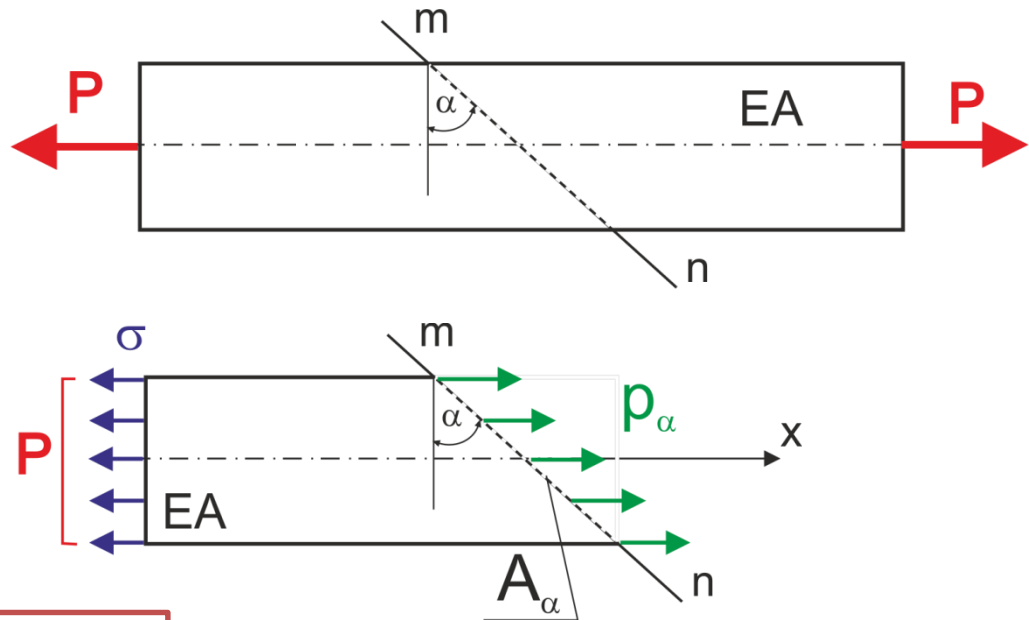
Jeżeli $\sigma_x = \sigma \neq 0$ pozostałe składowe tensora naprężenia = 0
to mówimy o jednoosiowym stanie naprężenia

$$\sigma_{ij} = T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Typowym przypadkiem jednoosiowego stanu naprężenia jest rozciąganie pręta siłami osiowymi



$$P = \sigma \cdot A \rightarrow \sigma = \frac{P}{A}$$



Rzutujemy wszystkie siły na oś "x":

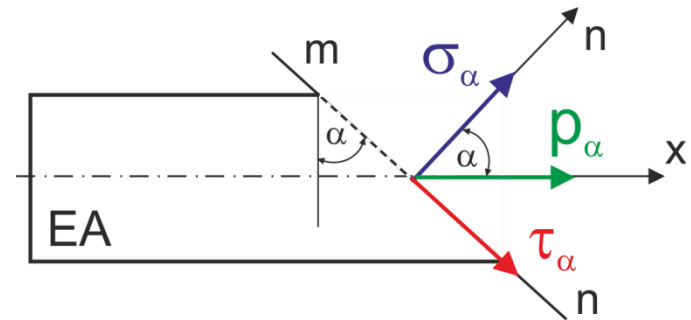
$$-\sigma \cdot A + p_{\alpha} A_{\alpha} = 0$$

$$p_{\alpha} = \sigma \frac{A}{A_{\alpha}} = \sigma \cos \alpha \quad \text{stąd}$$

$$p_{\alpha} = \sigma \cos \alpha$$

$$A_{\alpha} = \frac{A}{\cos \alpha}$$

$$p_{\alpha} = \sigma \cos \alpha$$



Naprężenie p_{α} rozkładamy na kierunek normalny i styczny:

$$\sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cos \alpha$$

$$\tau_{\alpha} = p_{\alpha} \sin \alpha$$

Składowa normalna i składowa styczna:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha$$



WNIOSKI:

Dla $\alpha=0$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma = \sigma_{\max}$$

$$\tau_{\alpha} = 0$$

W przekrojach poprzecznych pręta naprężenia normalne osiągają wartość największą, a naprężenia tnące są równe 0

Dla $\alpha=\pi/2$ (90°)

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\tau_{\alpha} = \tau_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = 0$$

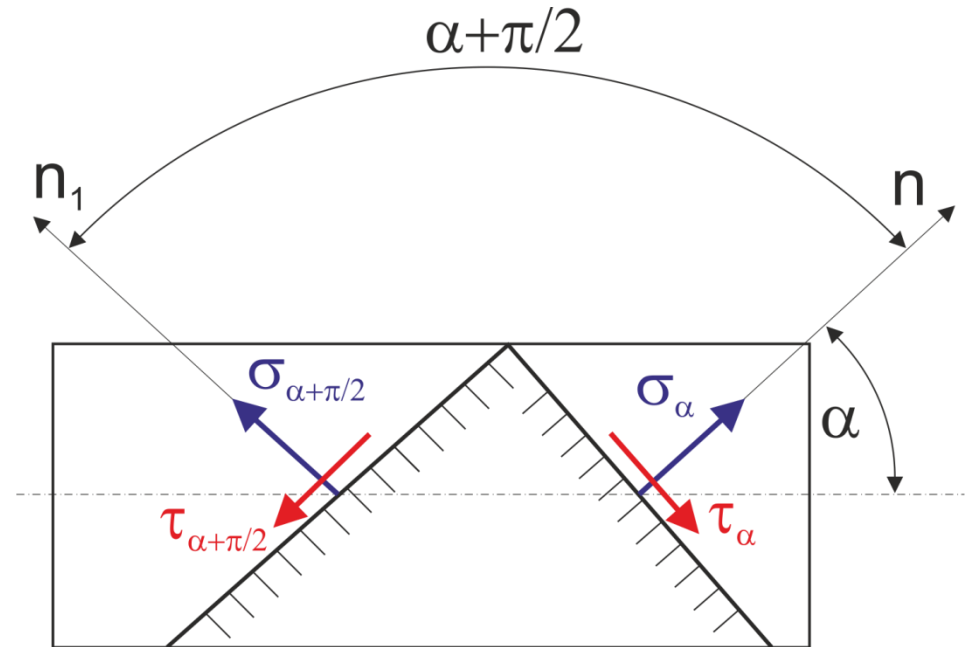
Dla $\alpha=\pi/4$ (45°)

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\alpha=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sigma$$

$$\tau_{\alpha} = \tau_{\alpha=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sigma = \tau_{\max}$$

Naprężenia ścinające osiągają wartości ekstremalne pod kątem $\alpha=45^{\circ}$

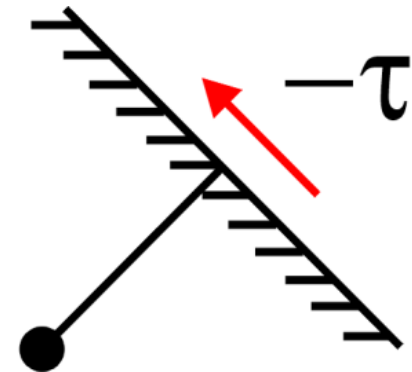
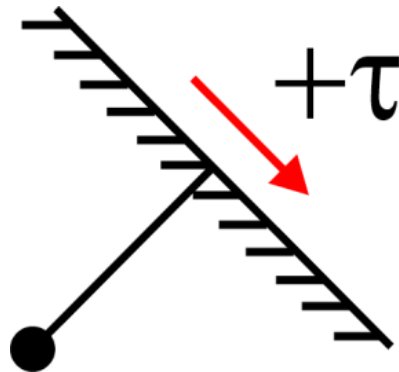
Wyznaczanie naprężeń normalnych i stycznych w dowolnym przekroju rozciąganego pręta



$$\sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = \sigma \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \sigma \sin^2 \alpha$$

$$\tau_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \sigma \sin^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \sigma \sin (2\alpha + \pi) = -\frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha$$

Naprężenia ścinające w przekrojach wzajemnie prostopadłych są sobie równe co do wartości bezwzględnej, lecz mają znaki przeciwne (naprężenia rozciągające „+”, naprężenia ściskające „-”)



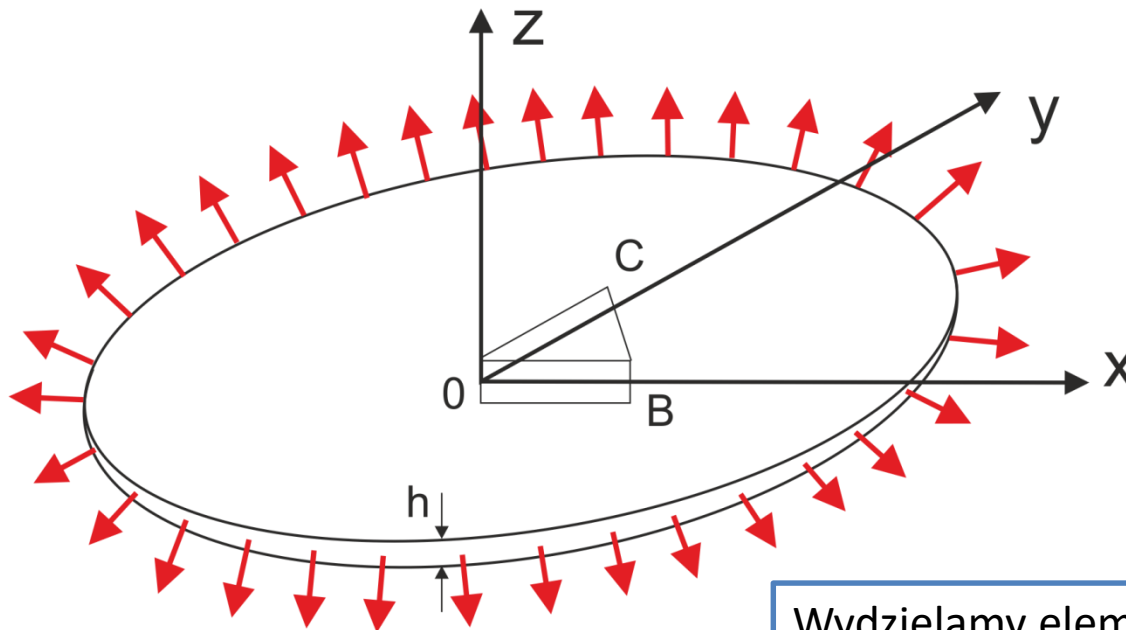
ZNAK naprężenia ścinającego ma charakter umowny !!!

Naprężenia normalne są dodatnie – skierowane zwrótem od przekroju i ujemne skierowane do przekroju.

Dwuwymiarowy STAN NAPRĘŻENIA

Dwuwymiarowy stan naprężenia występuje:

W tarczach, Samolotach (poszyciach samolotów), Zbiornikach cienkościennych, Kadłubach statków, Rurach cienkościennych



Wydzielamy element płaski OBC i rozpatrujemy jego statykę (grubość elementu jest jednostkowa albo mała w odróżnieniu od pozostałych elementów)

1. Rzutujemy siły działające na element OBC na kierunek normalny „n”

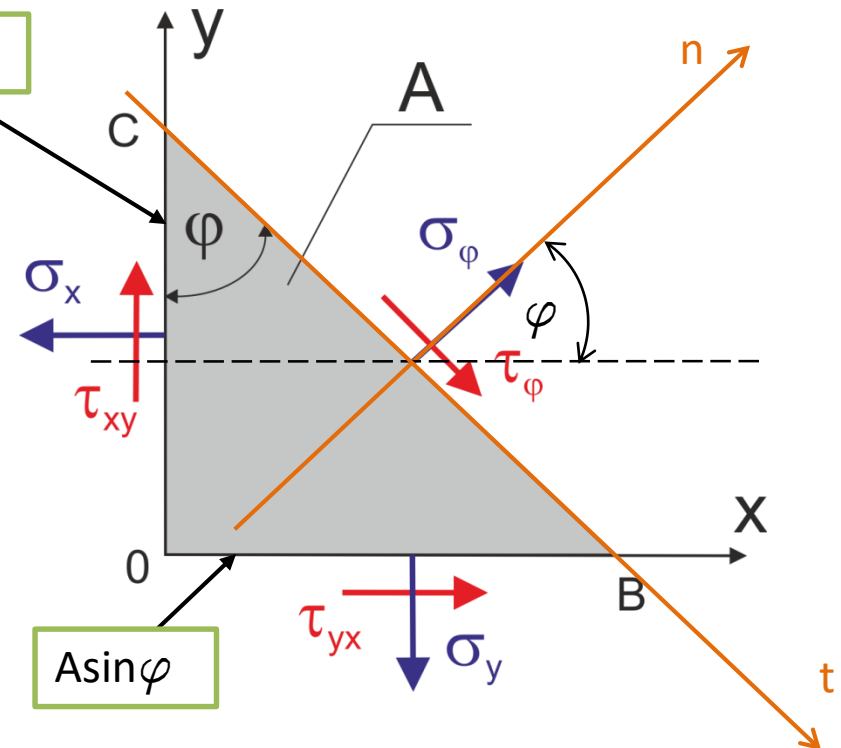
$$\sigma_{\varphi} A - [\sigma_x A \cos \varphi] \cos \varphi - [\sigma_y A \sin \varphi] \sin \varphi + [\tau_{xy} A \cos \varphi] \sin \varphi + [\tau_{yx} A \sin \varphi] \cos \varphi = 0$$

$$\sigma_{\varphi} = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

2. Rzutujemy siły na kierunek „t”

$$\tau_{\varphi} A - [\sigma_x A \cos \varphi] \sin \varphi + [\sigma_y A \sin \varphi] \cos \varphi - [\tau_{xy} A \cos \varphi] \cos \varphi + [\tau_{yx} A \sin \varphi] \sin \varphi = 0$$

$$\tau_{\varphi} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$



$$\tau_{\varphi} A - [\sigma_x A \cos \varphi] \sin \varphi + [\sigma_y A \sin \varphi] \cos \varphi - [\tau_{xy} A \cos \varphi] \cos \varphi + [\tau_{yx} A \sin \varphi] \sin \varphi = 0$$

Po pogrupowaniu wyrazów podobnych, otrzymujemy

$$\tau_{\varphi} = (-\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

Podstawiając: $\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$, $\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$, $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$



$$\sigma_{\varphi} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi$$
$$\tau_{\varphi} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

Szukamy ekstremum naprężenia normalnego:

$$\frac{d\sigma_\varphi}{d\varphi} = 0 \rightarrow \text{ekstremum } \sigma_\varphi \text{ (znikanie I pochodnej)}$$

$$\frac{d\sigma_\varphi}{d\varphi} \Rightarrow -2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - 2\tau_{xy} \cos 2\varphi = 0 / : 2 \cos 2\varphi$$

Równanie TRYGONOMOETRYCZNE

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Największy dodatni pierwiastek tego równania oznaczamy φ i wówczas kąt φ_0 spełniający to równanie ma postać:

$$\varphi = \varphi_0 \pm n \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } n=1,2,3,\dots$$

Następnym rozwiązaniem jest kąt φ powiększony o $\pi/2$ lub pomniejszony



Mamy dwa argumenty rozwiązania:

$$\varphi = \varphi_0$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$$

Płaszczyzny, w których naprężenia osiągają wartości maksymalne są do siebie wzajemnie prostopadłe.

UWAGA !!!

Ponieważ wyrażenie odpowiadające pochodnej naprężenia normalnego względem φ jest identyczne z wyrażeniem określającym naprężenia ścinające, to z warunku ekstremum wynika, że płaszczyzna, w których naprężenia normalne osiągają ekstremum naprężenia ścinające są równe zero.

Co to są naprężenia główne ?

Jak wyliczyć wartość naprężeń głównych ?

Podstawiając:

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_0}}, \quad \sin 2\varphi = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_0}}$$

Otrzymujemy:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \sigma_2 = \sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

NAPRĘŻENIA GŁÓWNE to takie naprężenia normalne, które osiągają wartości ekstremalne

Naprężenia główne, działają w kierunkach głównych, w których naprężenia ścinające są równe zero

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{\max,\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\tau_{\varphi} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

Graficzna Interpretacja – Koło MOHRA

Zakładamy, że naprężenia σ_x i σ_y przyjmują wartości główne:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \sigma_1 = \sigma_{\max} \\ \sigma_y = \sigma_2 = \sigma_{\min} \\ \tau_{xy} = 0 \end{array} \right\} \text{naprężenia główne}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\varphi} = \sigma \\ \tau_{\varphi} = \tau \end{array} \right\} \text{oznaczamy odpowiednio}$$

$$\begin{array}{l} \sigma_{\varphi} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi \\ \tau_{\varphi} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi \end{array}$$

Pierwszy składnik w równaniu na naprężenia normalne przenosimy na stronę lewą następnie obydwa równania podnosimy do kwadratu i stronami dodajemy:

$$\left[\sigma - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]^2 + \tau^2 = \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right]^2$$

Równanie to reprezentuje okrąg we współrzędnych (σ, τ) o promieniu: $r = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$

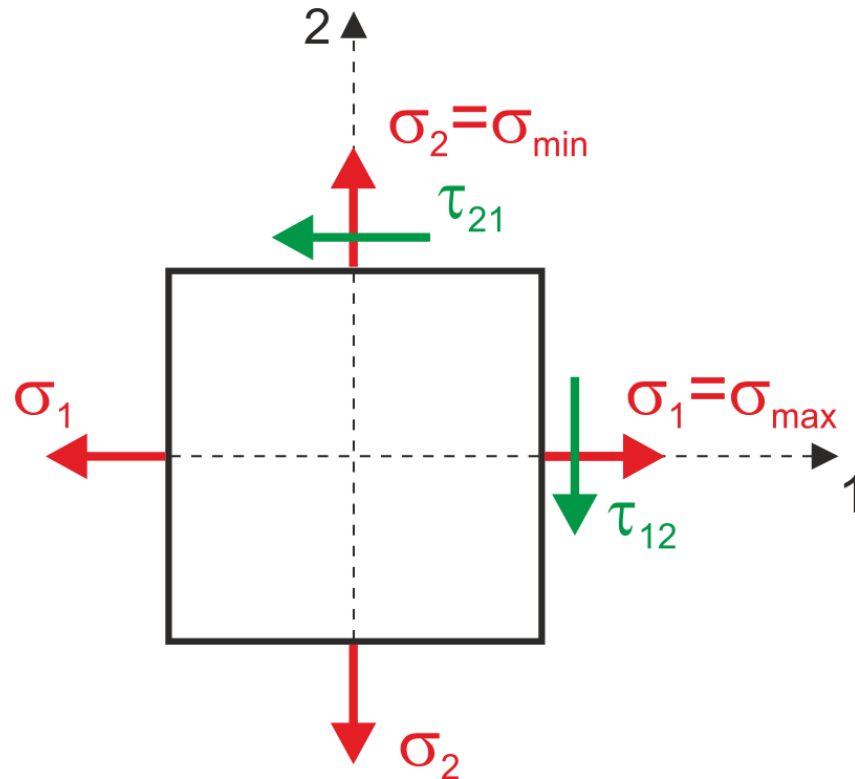
i środka położonym: $\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$

KOŁO MOHRA

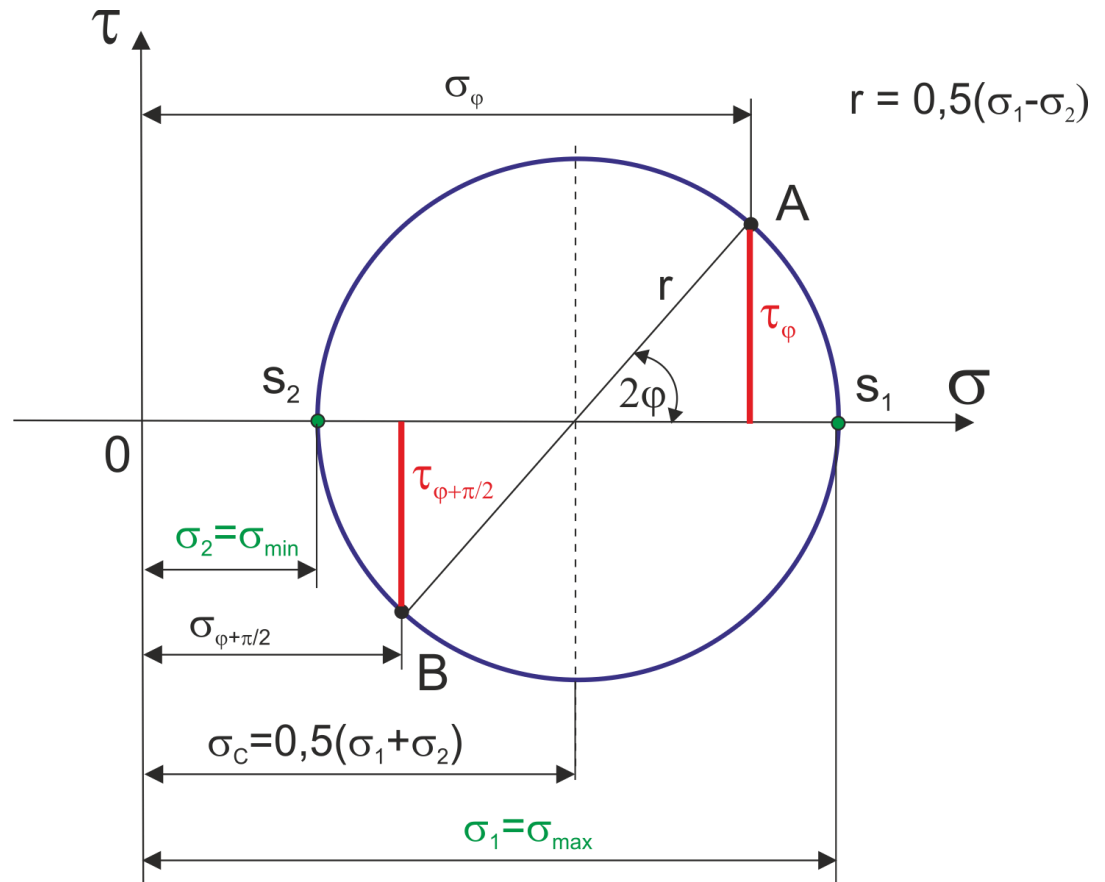
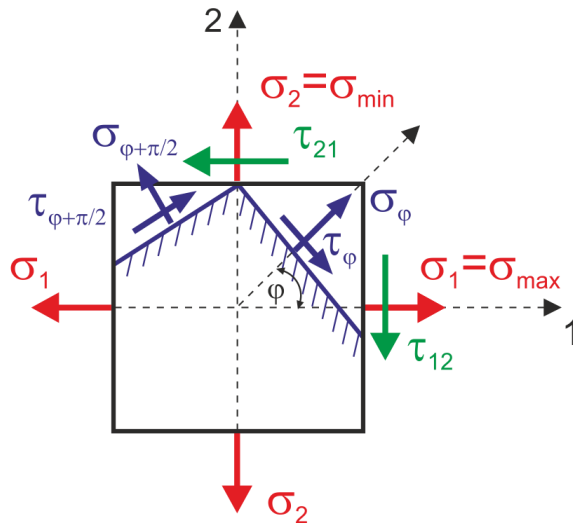
Christian Otto Mohr (ur. [1835](#), zm. [1918](#)) – niemiecki inżynier, wynalazca metody graficznego obliczania wytrzymałości konstrukcji. Stworzył on jedną z podstawowych hipotez wytrzymałościowych, pierwszy podał równanie odkształconej osi belki zginanej. Zajmował się zagadnieniem belek ciągłych, ustalając dla ich obliczania [równanie trzech momentów](#) i podając jego wykreślne rozwiązanie. Opracował graficzne przedstawienie naprężeń w danym punkcie – wykres ten nosi nazwę [koła Mohra](#).



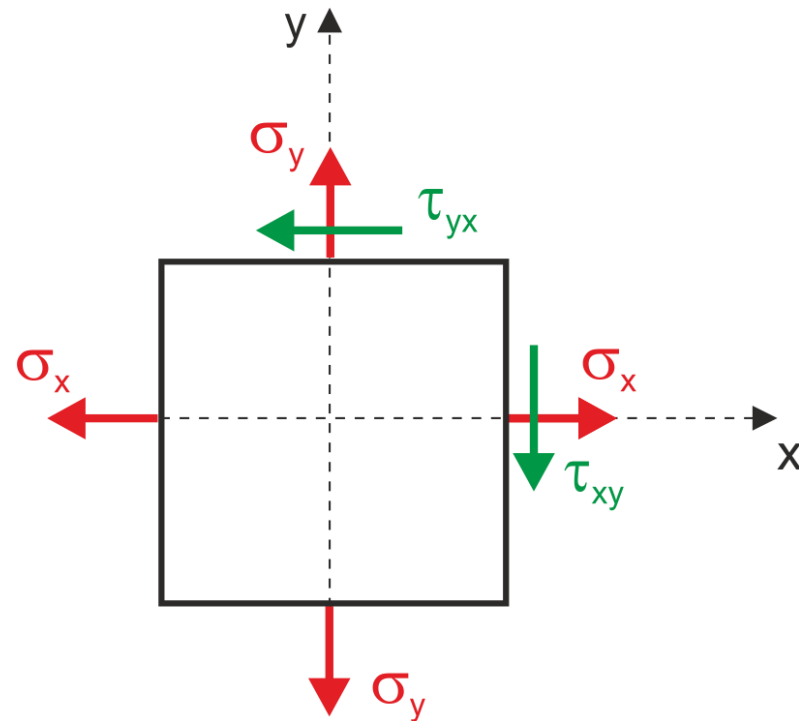
(1) Element jest obciążony $\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ układem naprężeń głównych

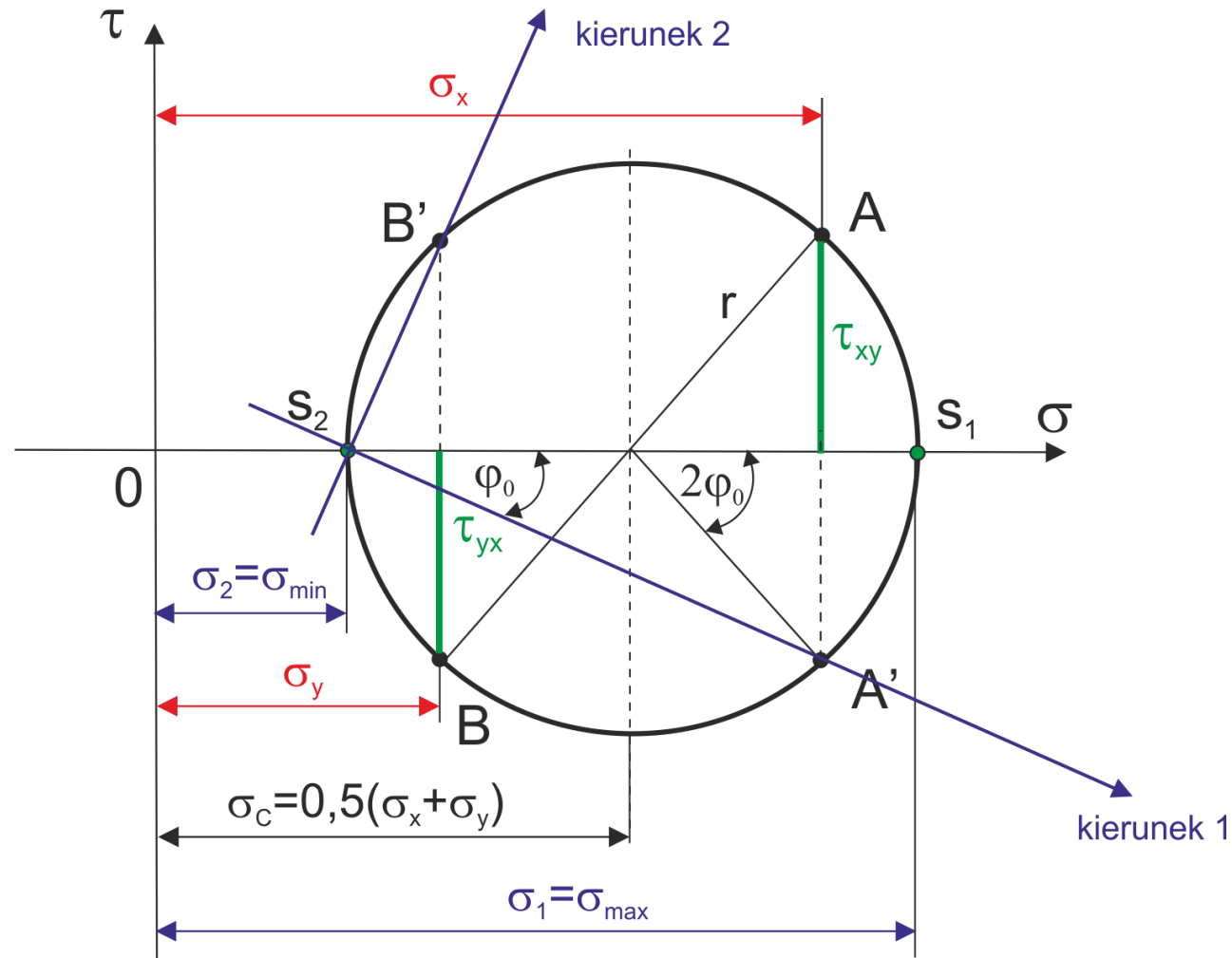
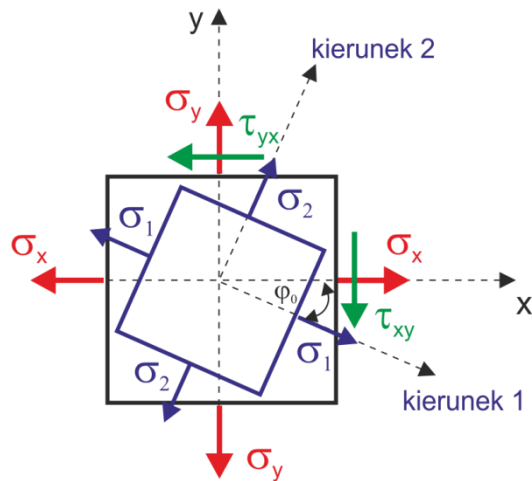


(1) Element jest obciążony $\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ układem naprężeń głównych



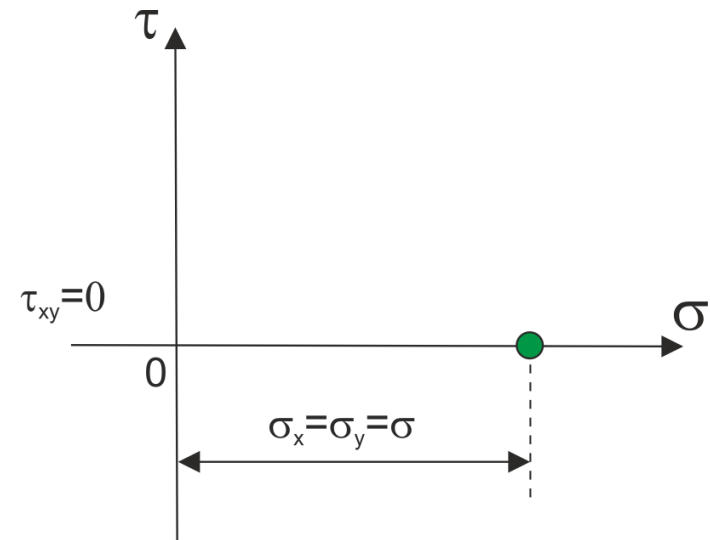
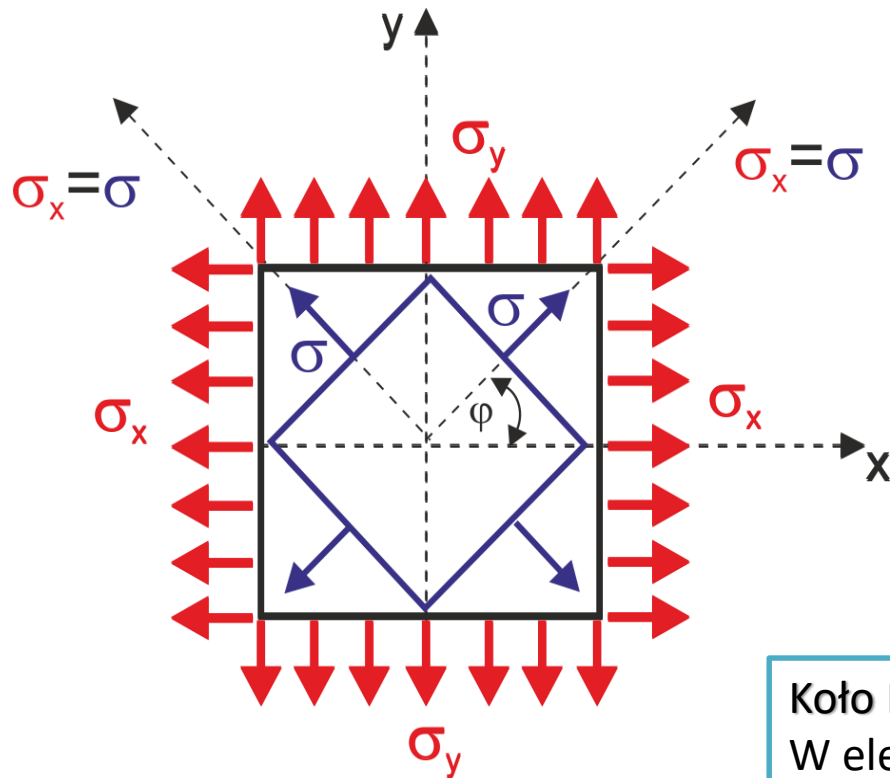
- (2) Element jest obciążony $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ układem naprężeń dowolnych. Wyznaczyć naprężenia główne: σ_1, σ_2 oraz położenie kierunków głównych (w których działają naprężenia główne), kąta φ_0 za pomocą KOŁA MOHRA





(3) Równomierne rozciąganie lub ściskanie

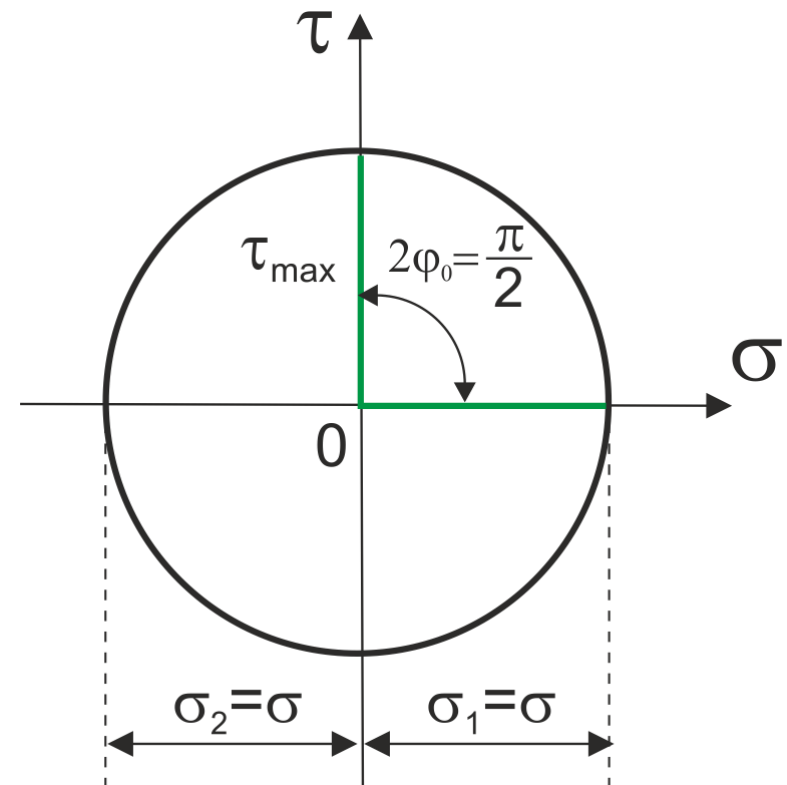
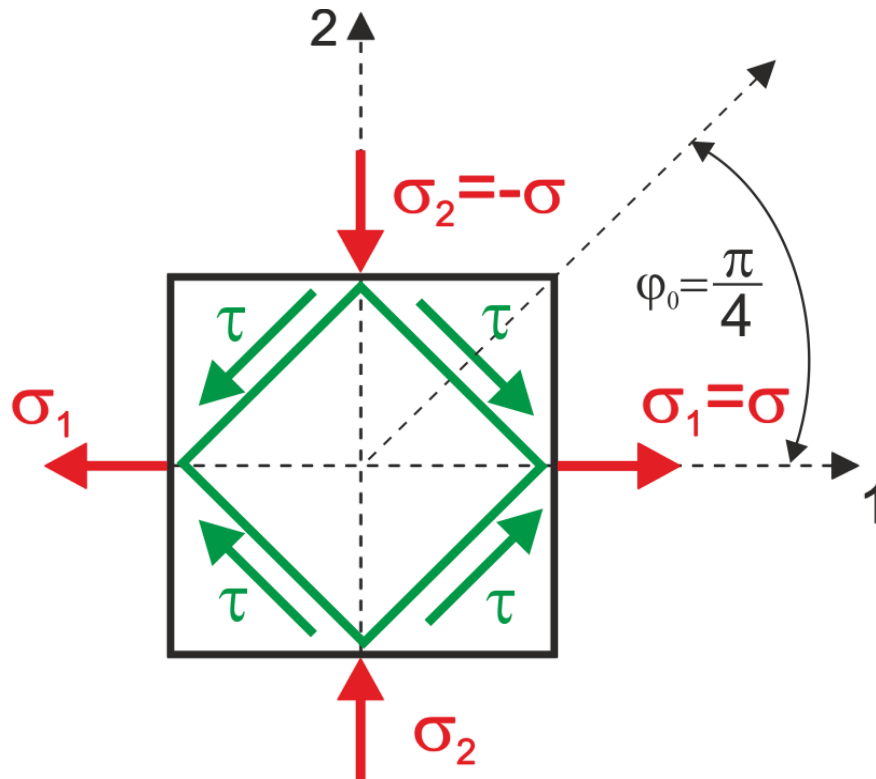
Jeżeli $\tau_{xy} = 0$ naprężenia σ_x, σ_y stają się naprężeniami głównymi ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$)



Koło MOHRA przechodzi w punkt.
W elemencie tak obciążonym w żadnym kierunku nie występują naprężenia tnące, ścinające.

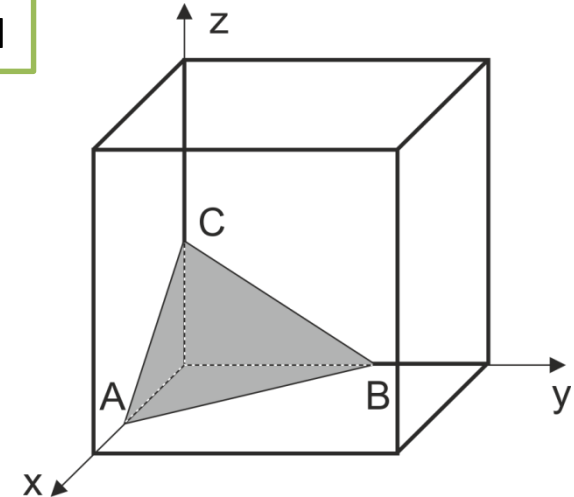
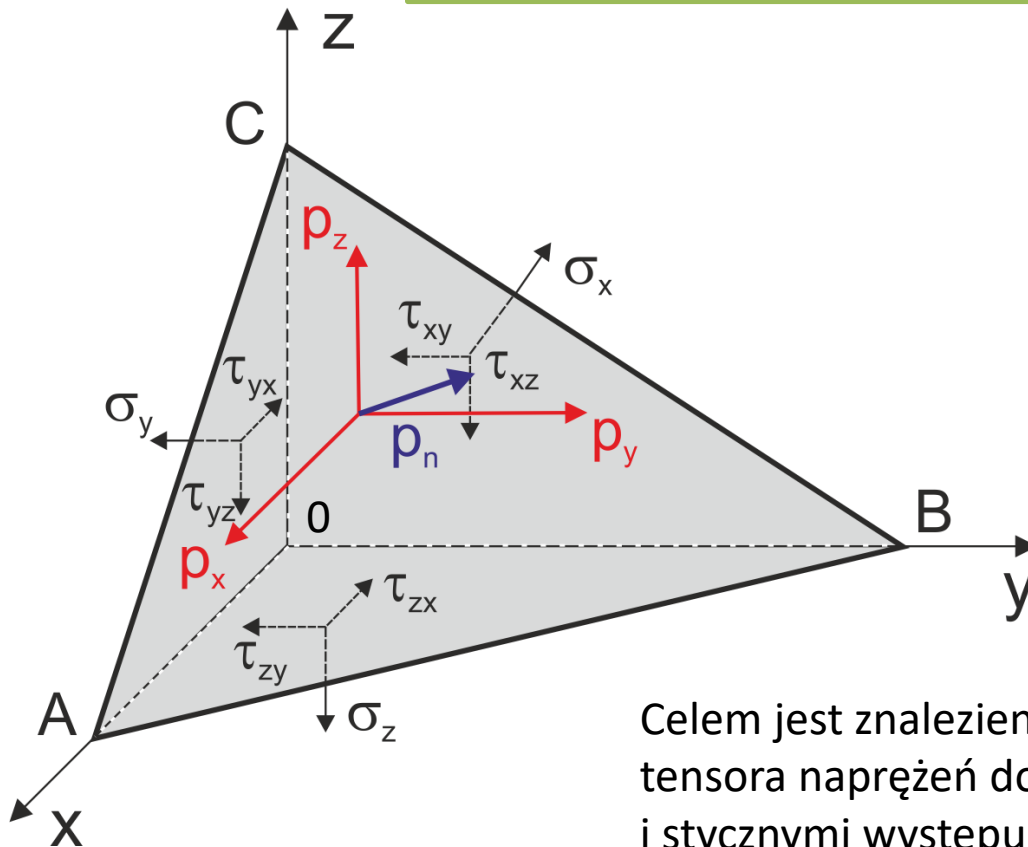
(4) Czyste ścinanie – w jednym kierunku element jest ściskany i rozciągany taką samą siłą

Maksymalne naprężenia tnące występują pod kątem $\frac{\pi}{4} = (45^\circ)$ do naprężeń głównych



Trójosiowy STAN NAPRĘŻENIA

Naprężenia w punkcie materialnym
ciała – podstawa TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

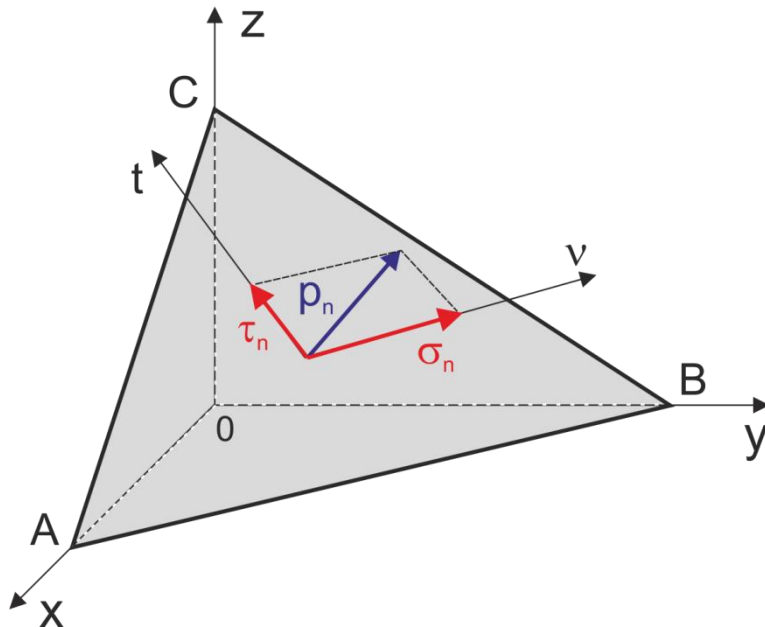


Celem jest znalezienie zależności pomiędzy składowymi tensora naprężeń dowolnych a naprężeniami normalnymi i stycznymi występującymi na ścianie ABC

Kierunek wektora wypadkowego naprężenia p_n na ściance ABC jest dowolny

1. Piszemy równania równowagi wszystkich sił działających na element OABC na kierunek osi x , y i z

2. Podstawiamy kosinusy kierunkowe (prostej normalnej do ścianki ABC)



$$l = \cos(vx)$$

$$m = \cos(vy)$$

$$n = \cos(vz)$$

$$p_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n$$

$$p_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n$$

$$p_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n$$

$$p_n = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

$$p_n = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2}$$

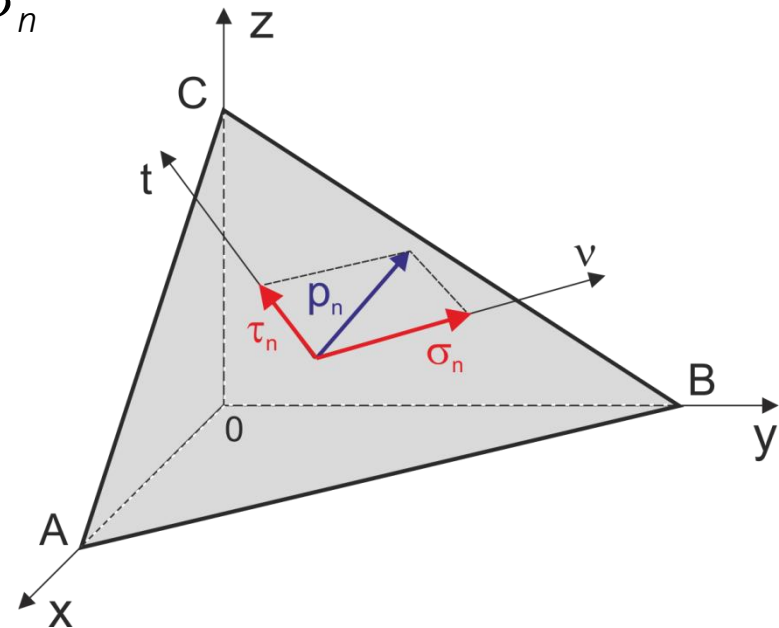
Po podstawieniu p_x , p_y i p_z otrzymujemy:

Naprężenia normalne:

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{xz} nl$$

Naprężenia ścinające:

$$\tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2}$$



Naprężenia główne (naprężenia ścinające):

$$\sigma^3 - \sigma^2 I_1 + \sigma I_2 - I_3 = 0$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

I_1, I_2, I_3 zwane są niezmiennikami stanu naprężenia

I_1 – niezmiennik liniowy

I_2 – niezmiennik kwadratowy

I_3 – niezmiennik sześcienny

Wielkości te są stałe i niezmiennie, niezależne od położenia osi xyz

Analiza trójosiowego stanu naprężenia, kilka charakterystycznych uwag:

Można wykazać, że jeżeli w trzech ortogonalnych płaszczyznach danych jest 6 składowych stanu naprężenia, to wówczas można wyznaczyć naprężenia działające w dowolnie nachylonej płaszczyźnie przechodzącej przez dany punkt

$$\sigma_{ij} = T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - naprężenia normalne
 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ - naprężenia styczne (scinające)

Stan naprężeń w punkcie materialnym jest określony sześcioma składowymi tensora naprężenia

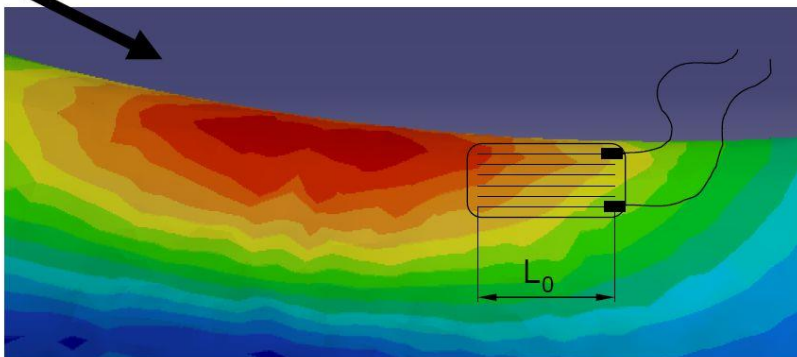
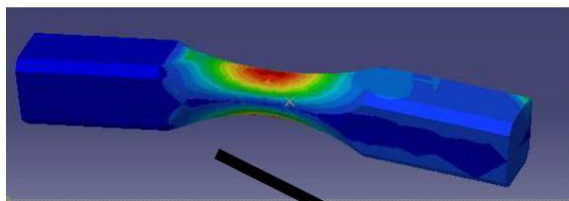
Największe naprężenie ścinające w punkcie w trójwymiarowym stanie naprężenia działa w płaszczyźnie przecinającej płaszczyzny naprężeń σ_1 i σ_3 :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

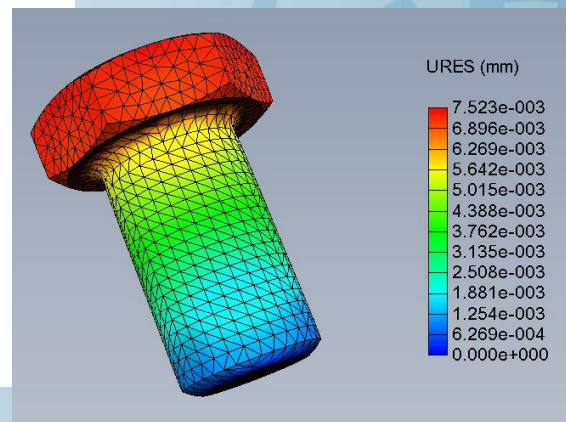


Pomiary tensometryczne

Wynik pomiaru tensometrycznego dla nierównomiernych rozkładów odkształceń zależy od bazy tensometru:



IM MNIEJSZA BAZA – TYM LEPIEJ !!!



DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ
Zapraszam ponownie 😊