



---

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

---

Wykład NR12 v. 4.0

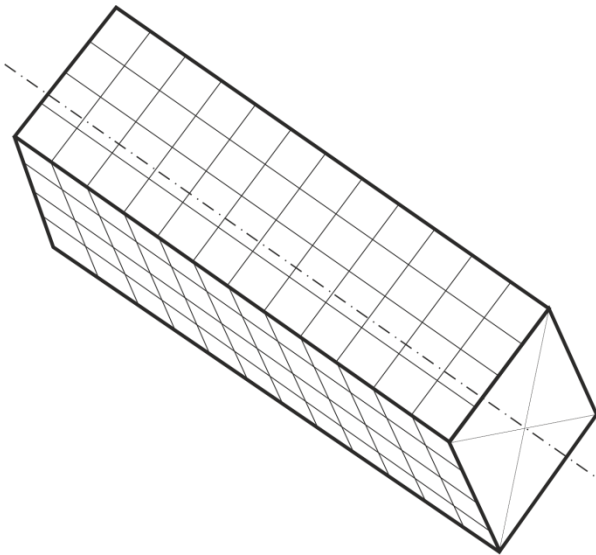
# SKRĘCANIE PRĘTÓW O PRZEKROJACH NIEOKRĄGŁYCH

**dr hab. inż. Piotr PACZOS**

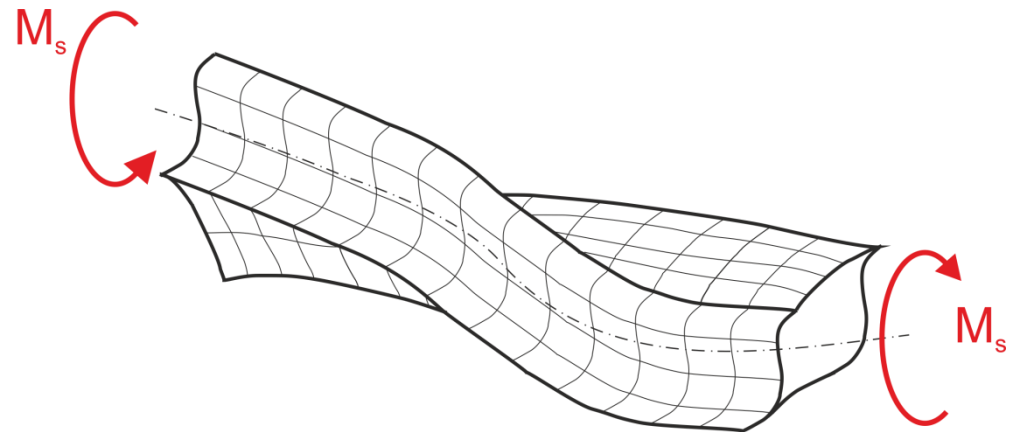
**Politechnika Poznańska,  
Instytut Mechaniki Stosowanej,  
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji**

## Skręcanie prętów o przekrojach nieokrągłych

Pręt o przekroju prostokątnym:

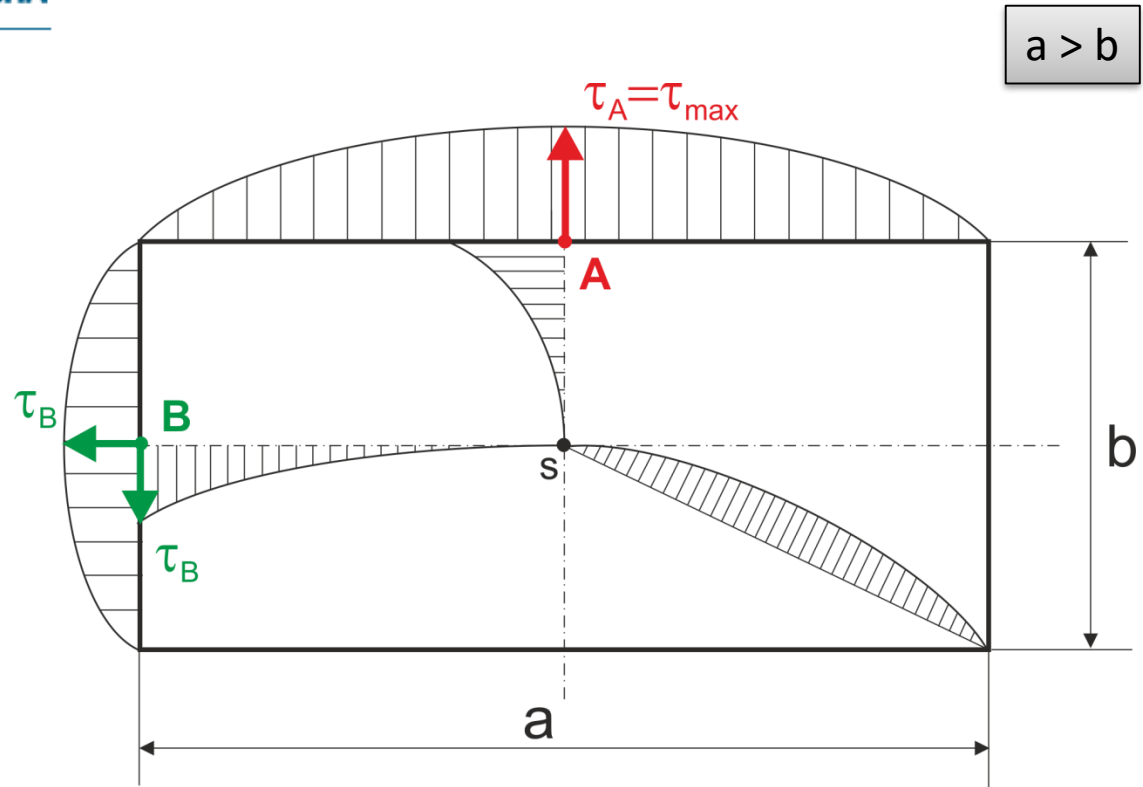
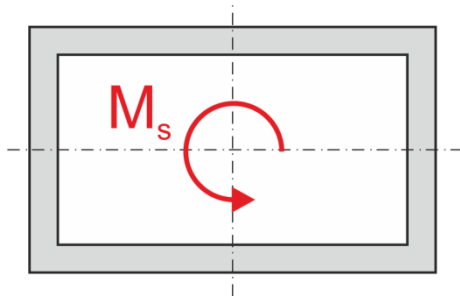


Deplanacja przekroju:



Przekrój prostokątny skręcany w odróżnieniu od przekroju kołowego ulega deplanacji (nie pozostaje płaski)

## Obraz przebiegu naprężeń



Analogia hydrodynamiczna może w przybliżeniu wskazać wielkości i kierunki naprężeń stycznych (naprężenia skręcające w przekroju prostokątnym)

Analogia błonowa KELWINA

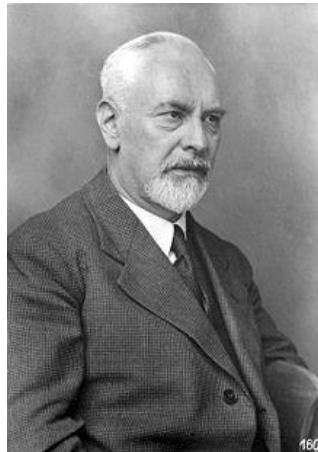
Analogia błonowa, analogia Prandtla,  
analogia fiz. w opisie przepływu cieczy lepkiej  
i naprężeń w skręconym pręcie oraz ugięcia błony;

wynika stąd, że równanie Poissona w przestrzeni dwuwymiarowej pozwala wyznaczyć zarówno rozkład naprężeń stycznych w skręcanym pręcie sprężystym, jak i rozkład prędkości cieczy nieściśliwej w rurze o przekroju skręcanego pręta lub ugięcie błony napiętej na otworze w kształcie przekroju pręta — stanowi to podstawę analogii hydrodynamicznych i analogii błonowej

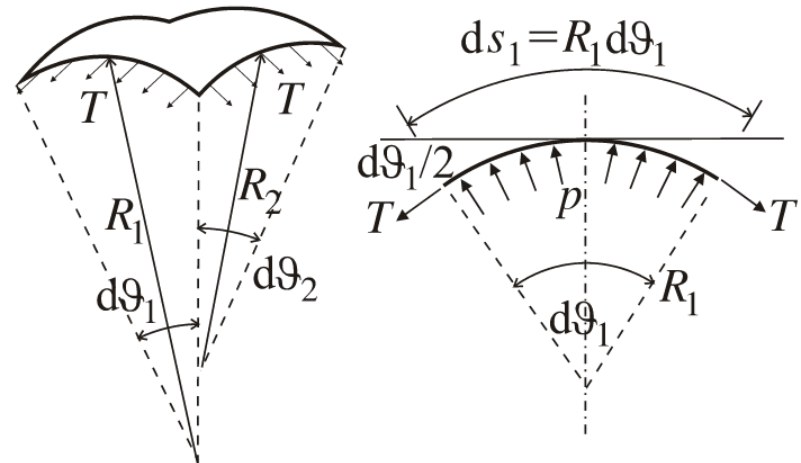
#### Ludwig Prandtl

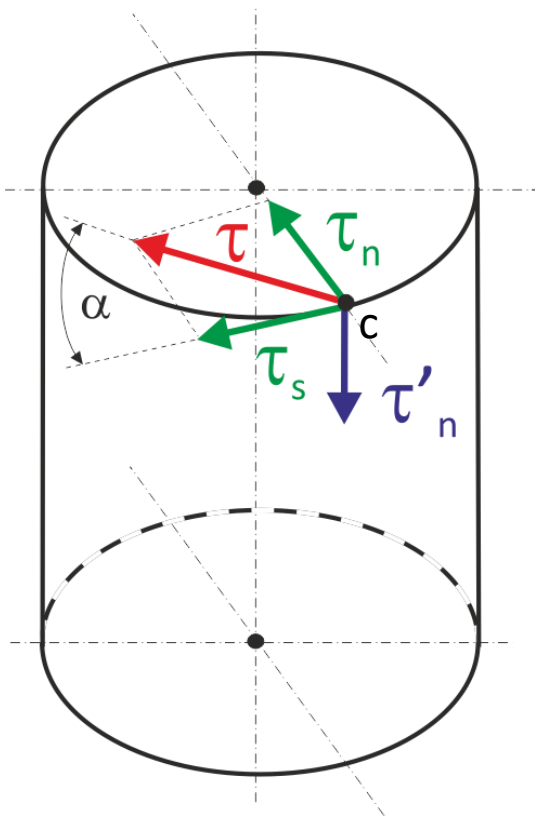
(ur. [4 lutego 1875](#) we [Fryzyndze](#) –  
zm. [15 sierpnia 1953](#) w [Getyndze](#)),  
niemiecki fizyk.

Od [1901](#) roku profesor politechniki  
w [Hanowerze](#). Prowadził badania  
z dziedziny teorii sprężystości. W [1905](#)  
opracował teorię przepływu burzliwego,  
teorię warstwy przyściennej oraz teorię  
płata nośnego. Autor wielu poważnych  
prac z dziedziny [aerodynamiki](#).  
Zobacz też: [liczba Prandtla](#), [rurka Prandtla](#).



#### Analogia błonowa Prandtla





Składowe naprężenia stycznego w punktach na konturze przekroju mają kierunki styczne do konturu. Składowe prostopadłe do konturu są równe zero.

Ponieważ nie ma naprężeń stycznych na bocznej powierzchni:

Zakładamy, że w pkt. C konturu naprężenie styczne jest nachylone do stycznej pod kątem  $\alpha$

Rozkładamy naprężenia styczne  $\tau$  na dwa kierunki:

1. NORMALNY  $\tau_n$
2. STYCZNY  $\tau_s$

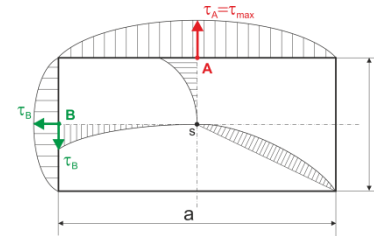
$a/b$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	6	8	10	$\infty$
$\eta_1$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,299	0,307	0,313	0,333
$\eta_2$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281					

Na podstawie prawa naprężeń – odpowiadających sobie naprężeń stycznych w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach naprężenie  $\tau_n$  musi być równe naprężeniu  $\tau_s$

Ponieważ na swobodną ścianę pręta nie działają żadne siły powierzchniowe więc  $\tau_n' = 0$ , a zatem  $\tau_n = 0$ , a naprężenia styczne  $\tau$  muszą mieć kierunek styczny do konturu.

W przekroju prostokątnym największe naprężenia styczne występują w środku dłuższego boku – punkt A

$$I_s = \beta ab^3 \longrightarrow W_s = \alpha ab^2$$



$$\tau_{Amax} = \frac{M_s}{\alpha ab^2}$$

$$\varphi = \frac{M_s l}{\beta ab^3 G}$$

a/b	1	1.5	2	2.5	3	4	6	8	10
$\alpha$	0.208	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.333
$\beta$	0.141	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281			



Podane wzory można uogólnić stosując ogólne zależności dla przekrojów nieokrągłych w postaci:

gdzie  $I_s [mm^4]$      $W_s [mm^3]$

$$\tau_s = \frac{M_s}{W_s} \quad \varphi = \frac{M_s l}{G I_s}$$

Oznaczają pewne stałe, które zależą od rozmiaru i kształtu przekroju i dla

Wzory te przybierają postać wzorów dla przekroju kołowego

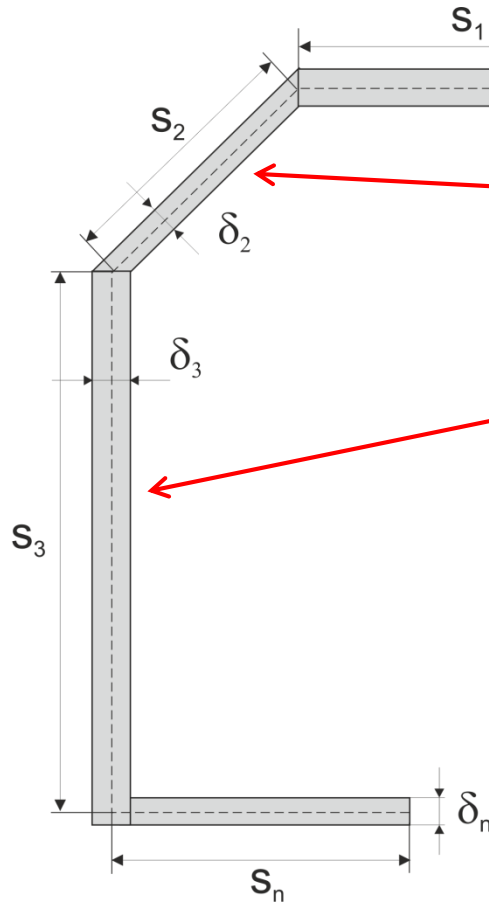
$$I_s = I_0 [mm^4]$$

$$W_s = W_0 [mm^3]$$

Energia sprężysta pręta skręcanego o dowolnym przekroju przedstawia wzór:

$$V_{skr} = \int_0^l \frac{M_s^2}{2G I_s} dx$$

## Skręcanie swobodne prętów cienkościennych o przekrojach otwartych



$$I_s = I_{s_1} + I_{s_2} + I_{s_3} + \dots + I_{s_n} = \sum_{i=1}^n I_{s_i}$$

Moment bezwładności  $I_s$  możemy opisać jako algebraiczną sumę dla poszczególnych segmentów profilu.

Jeżeli przyjmiemy, że kąt skręcenia całego przekroju i poszczególnych jego segmentów jest taki sam, możemy zapisać:

$$\varphi = \frac{M_s I}{G I_s} = \frac{M_s I}{G I_{s_1}} = \frac{M_s I}{G I_{s_2}} = \dots = \frac{M_s I}{G I_{s_n}}$$



Stąd całkowity moment skręcający rozdziela się na poszczególne części składowe przekroju:

$$M_{s_1} = M_s \cdot \frac{I_{s_1}}{I_s}; \quad M_{s_2} = M_s \cdot \frac{I_{s_2}}{I_s}; \quad \dots; \quad M_{s_n} = M_s \cdot \frac{I_{s_n}}{I_s};$$

Maksymalne naprężenia skręcające w poszczególnych częściach przekroju określa wzór:

$$\tau_{\max_n} = \frac{M_{s_n}}{W_{s_n}} = \frac{M_s}{I_s} \cdot \frac{I_{s_n}}{W_{s_n}}, \quad \text{dla } n=1,2,\dots$$

Jeśli potraktujemy pręt cienkościenny jako połączenie całego szeregu wąskich prostokątów (np. kątownik, dwuteownik, ceownik) to maksymalne naprężenia skręcające i kąt skręcenia obliczamy ze wzorów:

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{\alpha ab^2} \quad \varphi = \frac{M_s l}{\beta ab^3 G}$$

Przyjmując dla  
wg. tablicy

$$\alpha = \beta = 0,33$$

$$\frac{a}{b} = \infty$$

oraz oznaczając  $a = s$  i  $b = \delta$

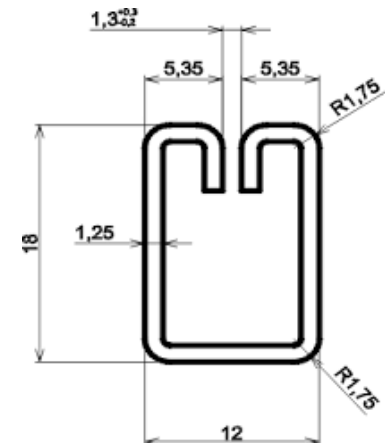
$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{\frac{1}{3}s\delta^2}$$

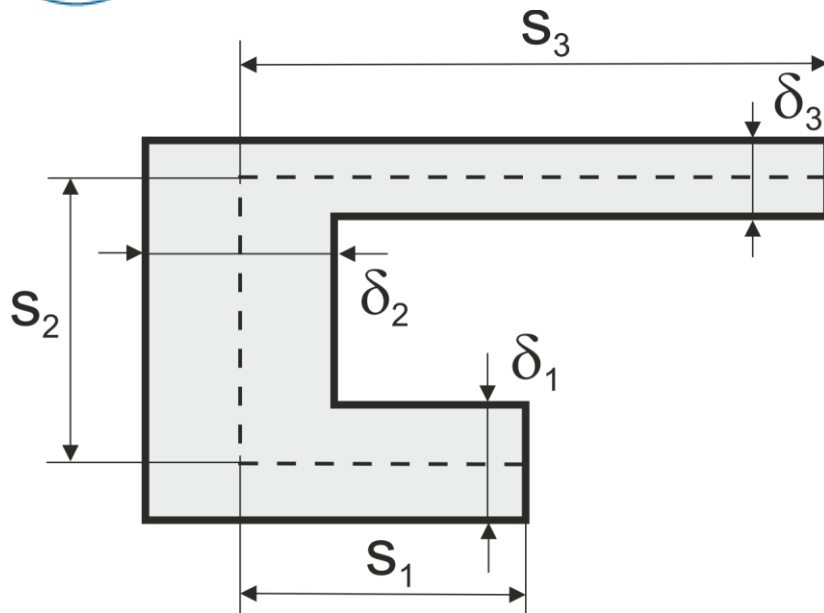
$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{I_s} \delta$$

$$I_s = \frac{1}{3}s\delta^3$$

W przypadku profilu składającego się z  $n$ -różnych prostokątów o różnych szerokościach (grubościach) i długościach:

$$I_s = \frac{1}{3} (s_1 \delta_1^3 + s_2 \delta_2^3 + \dots s_n \delta_n^3) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n s_i \delta_i^3$$





$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{I_s} \delta_{\max}$$

Zastępczy moment bezwładności:

$$I_s = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n s_i \delta_i^3$$

$\delta_{\max}$  - największa grubość elementu wchodzącego w skład danego przekroju

$$\varphi_{\max} = \frac{M_s}{G I_s}$$

$G I_s$  - sztywność skręcania de Saint-Venanta

W celu uzyskania lepszego przybliżenia dla konstrukcji cienkościennych przyjmuje się wzór:

$$I_s = \frac{\alpha}{3} \sum_{i=1}^n s_i \delta_i^3$$

$\alpha$  : jest współczynnikiem zależnym od danego kształtu przekroju

Kątownik  $\rightarrow \alpha = 1,00$



Ceownik walcowany  $\rightarrow \alpha = 1,12$



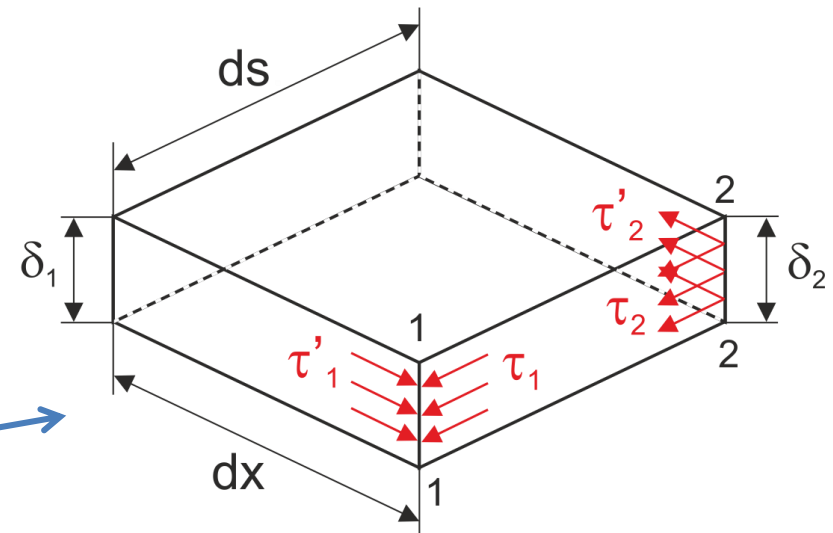
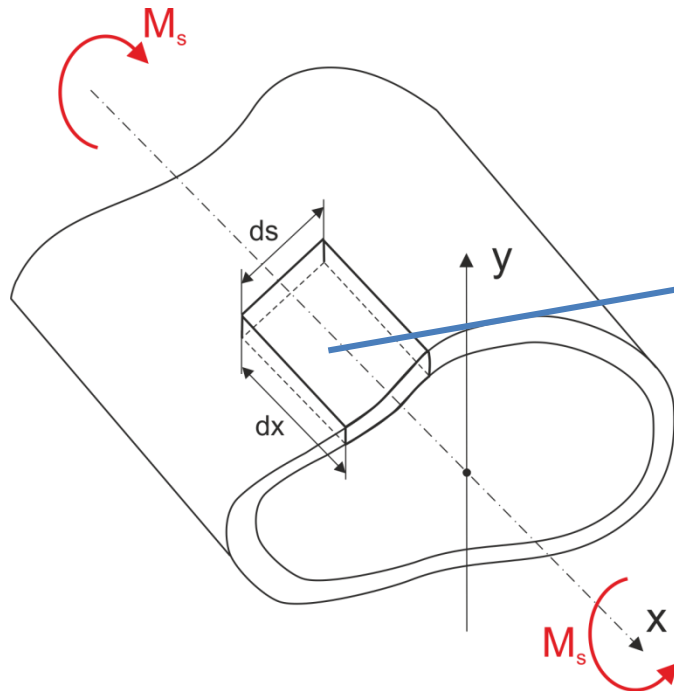
Teownik walcowany  $\rightarrow \alpha = 1,15$

Dwuteownik walcowany  $\rightarrow \alpha = 1,20$



Spawany Dwuteownik usztywniony przeponami  $\rightarrow \alpha = 1,50$

Skręcanie swobodne prętów cienkościennych o przekrojach zamkniętych



Warunek równowagi sumy rzutów sił wzdłuż kierunku  $x$  ma postać:

$$\tau_1' \delta_1 dx = \tau_2' \delta_2 dx$$

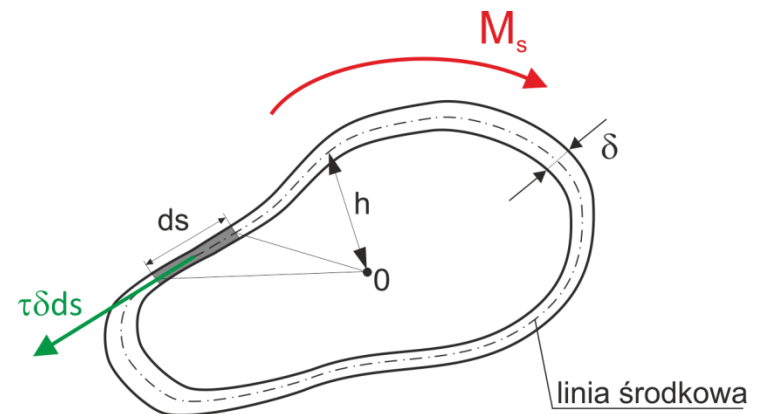
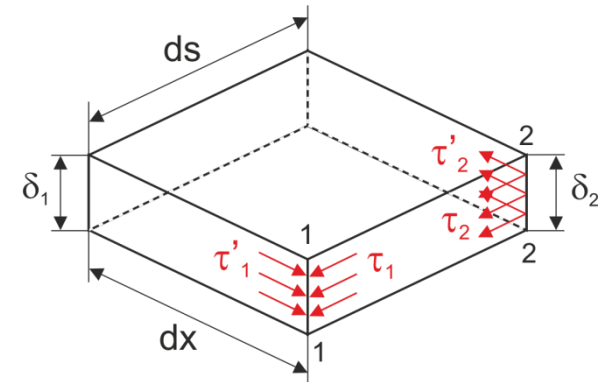
Ponieważ naprężenia ścinające na ściankach wzajemnie prostopadłych są sobie równe:

jeśli  $\tau'_1 = \tau_1$  to  $\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2$

$\tau'_2 = \tau_2$

Ponieważ przekrój 1-1 i 2-2 przyjęto zupełnie dowolnie to stąd wynika, że dla każdego innego przekroju jest spełniona zależność:

$$\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2 = \dots = \tau \delta = \text{const.}$$



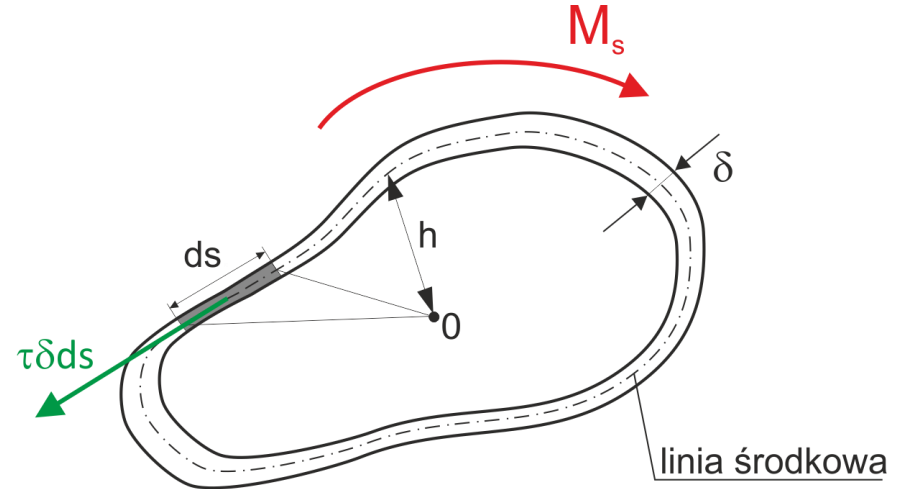
Aby wyznaczyć naprężenia piszemy równanie momentów względem środka skręcenia „0”

„0” – dowolnie wybrany punkt, nie musi to być środek ciężkości

$$\oint \overbrace{\tau \delta ds}^{\text{siła}} \cdot \underbrace{h}_{\text{pole}} = M_s$$

Ponieważ  $\tau \delta = \text{const.}$  oraz  $h \cdot ds = 2 \cdot dF_0$

$dF_0$  - oznacza pole elementarnego wycinka trójkąta



$M_s$  – moment skręcający względem osi przechodzącej przez dowolnie wybrany punkt „0”



$$\text{stąd } M_s = \tau \delta \oint dF_0 = 2 \cdot \tau \delta F_0$$

$F_0$  - oznacza całkowite pole figury ograniczonej linią środkową przekroju

$$\tau = \frac{M_s}{2\delta F_0}$$

← Wzór BREDTA

Kąt skręcania obliczamy wykorzystując energię skręcania:  $\Phi = \frac{\tau^2}{2G}$

↑  
Energia właściwa (jednostkowa) skręcania

Obliczamy energię nagromadzoną w elemencie  $dsdx\delta$

$$dV = \Phi \cdot dsdx\delta = \frac{\tau^2}{2G} dsdx\delta$$





Obliczamy energię nagromadzoną w elemencie  $ds dx \delta$

$$dV = \Phi \cdot ds dx \delta = \frac{\tau^2}{2G} ds dx \delta$$

Całkując po długości  $l$  i obwodzie konturu otrzymamy:

$$V = \frac{l \delta^2 \tau^2}{2G} \int_s \frac{ds}{\delta}$$

Praca wykonana przez moment skręcający  $M_s$  wynosi:

$$L = \frac{1}{2} \cdot M_s \cdot \varphi$$

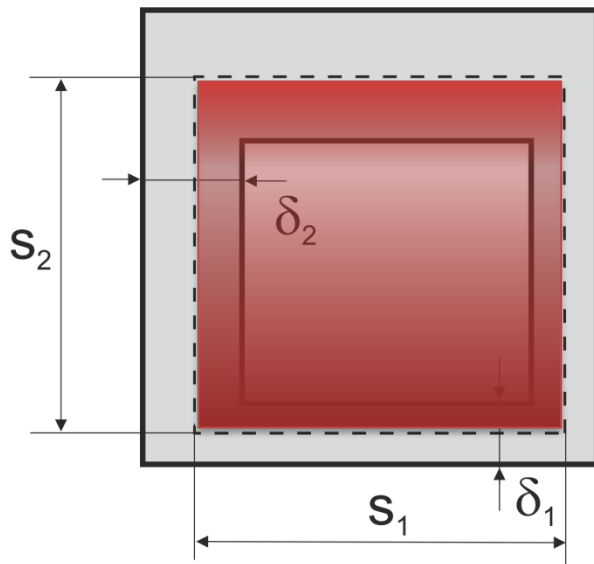
$$V = L \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot M_s \cdot \varphi = \frac{l \delta^2 \tau^2}{2G} \int_s \frac{ds}{\delta}$$

Całkowanie odnosi się do obwodu linii środkowej

$$\varphi = \frac{M_s \cdot l}{4G \cdot F_0^2} \int_s \frac{ds}{s}$$

## Skręcanie swobodne prętów cienkościennych o przekrojach zamkniętych

## Wzory BREDTA:



$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{2A_0 \delta_{\min}}$$

$$\varphi_{\max} = \frac{M_s l}{4GA_0^2} \int \frac{ds}{\delta}$$

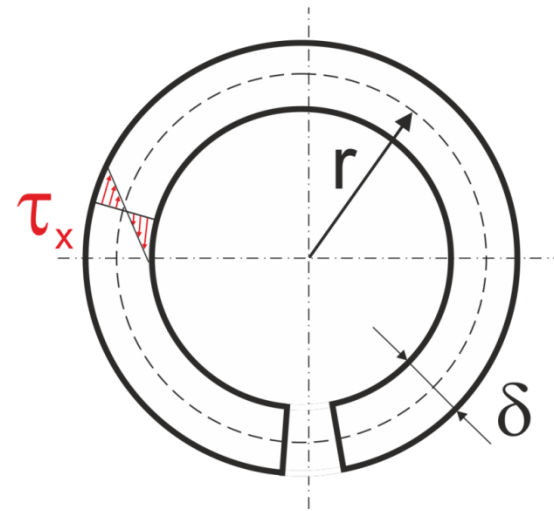
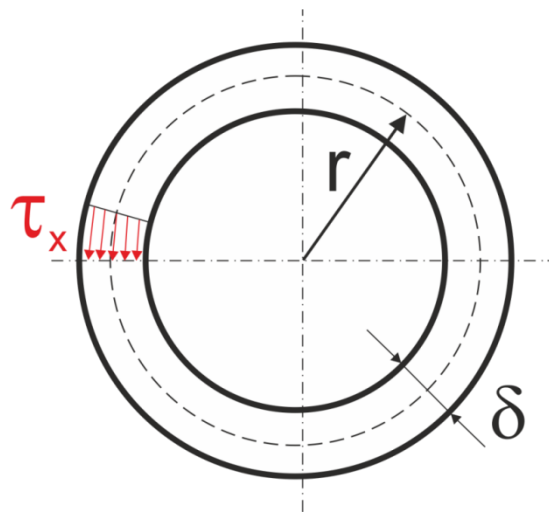
Jeśli grubość  $\delta$  nie zmienia się wzdłuż długości łuku konturu:

$s$  – długość konturu zamkniętego wzdłuż linii środkowej

$$\varphi_{\max} = \frac{M_s l s}{4GA_0^2 \delta}$$

**ZADANIE 1**

Porównanie swobodnego skręcania prętów cienkościennych: zamkniętych i otwartych  
(rozcięcie rury wzdłuż tworzącej)

Zasadnicze różnice:

1. Charakter rozkładu naprężeń na grubości ścianki
2. Wartości naprężeń max.
3. Sztywność skręcania przekrojów

$$\tau_{\max} \rightarrow \delta_{\min}$$

$$\tau_{\max} \rightarrow \delta_{\max}$$

$$I_s^{(z)} = \frac{4A_0^2}{\frac{1}{\delta} \oint ds} = \frac{4\pi^2 r^4}{\left[ \frac{1}{\delta} 2\pi r \right]} = 2\pi r^3 \delta$$


$$I_s^{(o)} = \frac{1}{3} 2\pi r \delta^3 = \frac{2}{3} \pi r \delta^3$$

Jeśli obydwa pręty są skręcane takim samym momentem, to stosunki jednostkowych kątów skręceń  $\varphi$  wynoszą:


$$\frac{\varphi^{(o)}}{\varphi^{(z)}} = \frac{I_s^{(z)}}{I_s^{(o)}} = 3 \left( \frac{r}{\delta} \right)^2$$

$$\frac{\tau_{\max}^{(o)}}{\tau_{\max}^{(z)}} = \frac{W_s^{(z)}}{W_s^{(o)}} = 3 \left( \frac{r}{\delta} \right)$$

$$\tau_{\max}^{(z)} = \frac{M_s}{2A_0 \delta_{\min}}$$


$$A_0 = 2\pi r$$

$$\tau_{\max}^{(o)} = \frac{M_s}{I_s} \delta_{\max}$$


$$I_s = \frac{1}{3} 2\pi r \delta^3$$

$$\delta_{\min} = \delta_{\max} = \delta$$

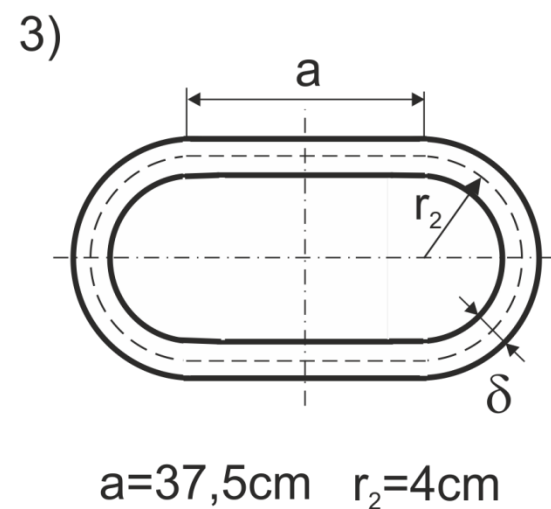
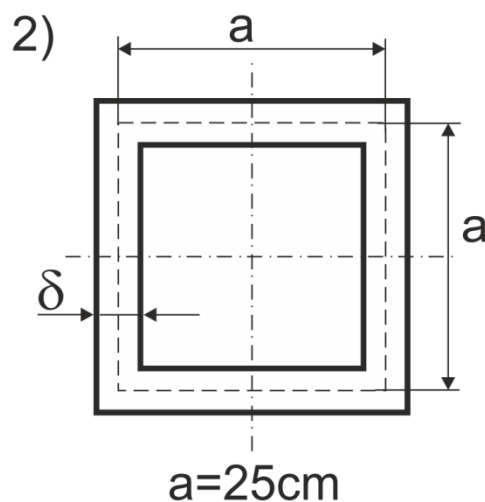
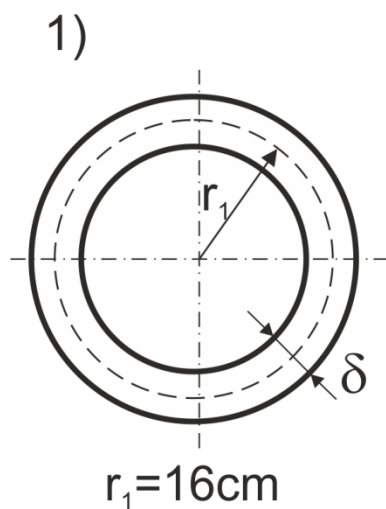
# OBLICZYĆ - PORÓWNAĆ

**ZADANIE 2**

Sprawdzić w jakim stosunku pozostają do siebie ciężary, max. naprężenia oraz kąty skręceń. Pręty skręcane są tym samym momentem skręcającym  $M_s$

**Zakładamy:**

1. Stały obwód  $S=100\text{cm}$
2. Jednakowe grubości ścianek  $\delta=3\text{mm}$
3. Wszystkie jednakowe odległości



## 1. Ciężary jednakowe

## 2. Maksymalne naprężenia tnące (przy skręcaniu)

$$\frac{\tau_{\max}^{(2)}}{\tau_{\max}^{(1)}} = \frac{A_0^{(1)}}{A_0^{(2)}} \Rightarrow 1,29$$

$$\frac{\tau_{\max}^{(3)}}{\tau_{\max}^{(1)}} = \frac{A_0^{(1)}}{A_0^{(3)}} \Rightarrow 4,0$$

3. Całkowity kąt skręcenia  $\varphi$  [rad] oraz jednostkowy kąt skręcenia  $\nu$  [rad/m]

$$\varphi = \nu \cdot l$$

$$\frac{\nu^{(2)}}{\nu^{(1)}} = \frac{A_0^{2(1)}}{A_0^{2(2)}} = 1,66$$

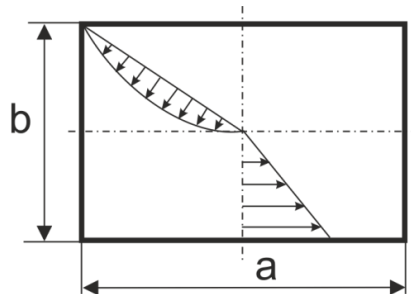
$$\frac{\varphi_{\max}^{(2)}}{\varphi_{\max}^{(1)}} = \frac{\nu_{\max}^{(2)}}{\nu_{\max}^{(1)}} = \frac{A_0^{2(1)}}{A_0^{2(2)}} \cdot \frac{S_c^{(2)}}{S_c^{(1)}} = 1,66$$

S – długość konturu zamkniętego ograniczonego linią środkową (obwód)

**=1**

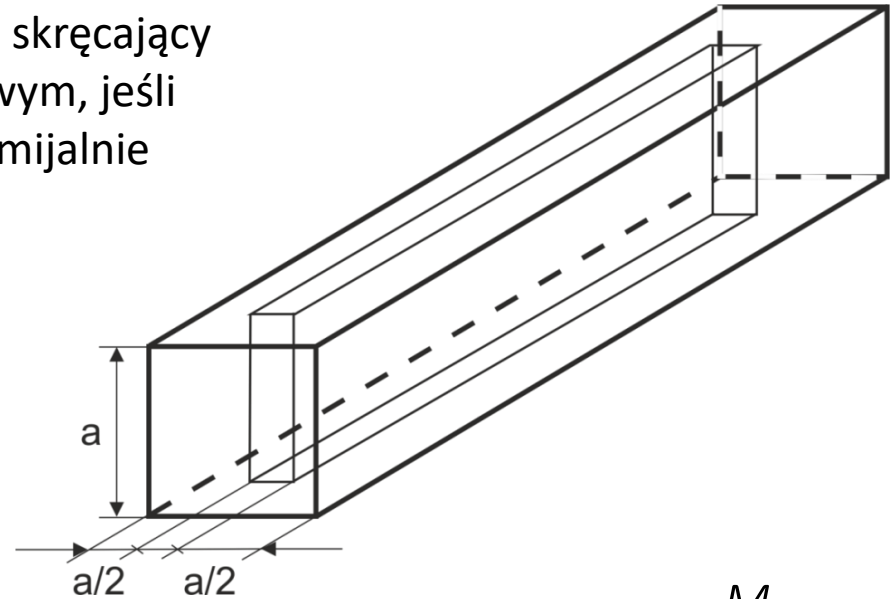
**ZADANIE 3**

Oblicz jak zmieni się dopuszczalny moment skręcający i kąt skręcenia pręta o przekroju kwadratowym, jeśli wykonamy w nim wzdłuż osi szczelinę o pomijalnie małej szerokości.



$$W_s = \alpha ab^2$$

$$J_s = \beta ab^3$$



$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{\alpha ab^2}$$

$$\theta = \frac{M_s}{\beta ab^3 G}$$

a/b	1	1.5	2	2.5	3	4	6	8	10
$\alpha$	0.208	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.333
$\beta$	0.141	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281			



Dla pręta o przekroju kwadratowym mamy, zgodnie z tabelą 1:

$$W_s^{(1)} = 0,208a^3 \quad J_s^{(1)} = 0,141a^4$$

Jako pręt ze szczeliną możemy rozpatrzyć dwa pręty o przekroju prostokątnym i grubości  $b=0.5a$ . Otrzymujemy wówczas (tabela 1):

$$W_s^{(2)} = 2 \cdot 0,246a \left( \frac{1}{2}a \right)^2 = 0,123a^3$$

$$J_s^{(2)} = 2 \cdot 0,229a \left( \frac{1}{2}a \right)^3 = 0,0573a^4$$

Z warunku wytrzymałościowego wynika, że moment dopuszczalny jest proporcjonalny do wartości  $W_s$  - Otrzymujemy więc:

$$\frac{M_s^{(2)}}{M_s^{(1)}} = \frac{W_s^{(2)}}{W_s^{(1)}} = \frac{0,123}{0,208} = 0,592$$

Korzystając z zależności na kąt skręcenia dla profili o przekroju prostokątnym otrzymujemy stosunek kątów skręceń:

$$\frac{\varphi^{(2)}}{\varphi^{(1)}} = \frac{M_s^{(2)}}{M_s^{(1)}} \cdot \frac{J_s^{(1)}}{J_s^{(2)}} = 0,592 \cdot \frac{0,141}{0,0573} = 1,46$$

$$\theta = \frac{M_s}{\beta a b^3 G}$$
$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{\alpha a b^2}$$

$$\frac{M_s^{(2)}}{M_s^{(1)}} = \frac{W_s^{(2)}}{W_s^{(1)}} = \frac{0,123}{0,208} = 0,592$$

**WNIOSEK:**

Mimo, że po wykonaniu szczeliny dopuszczalna wartość momentu skręcającego spadnie o ok. 40%, to odpowiadająca jej wartość kąta skręcania będzie o 46% większa.



W wałach napędowych:

$$M_s = M_{obr} = \frac{P}{\omega}$$

P - moc przekazana

$\omega$  - prędkość kątowa

n – prędkość obrotowa

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$$

$$[N \cdot m] M_s = 9550 \frac{P[kW]}{n[obr / min]}$$

$$[kG \cdot cm] M_s = 71620 \frac{P[kM]}{n[obr / min]}$$

**ZADANIE 4**

Dobrać średnicę wału przenoszonego moc  $P=70\text{kW}$  przy prędkości obrotowej  $n=1800\text{obr/min}$ , jeśli  $t=100\text{MPa}$ . Jaki kąt skręcenia wystąpi na długości  $l=1\text{m}$ , jeśli  $E=2,05 \cdot 10^5\text{MPa}$ ,  $\nu=0,3$ .

Moment skręcający:  $[N \cdot m] M_s = 9550 \frac{70 [\text{kW}]}{1800 [\text{obr} / \text{min}]} = 371,4 [N \cdot m]$

Naprężenia:  $\tau = \frac{M_s}{W_0} = \frac{16 \cdot M_s}{\pi \cdot d^3} \leq \tau_{dop}$

Średnica wału:  $d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_s}{\pi \cdot \tau_{dop}}} = 26,64\text{mm}$

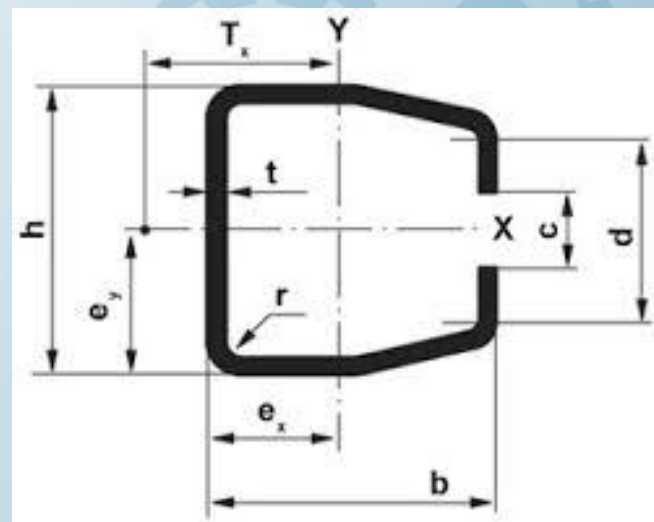
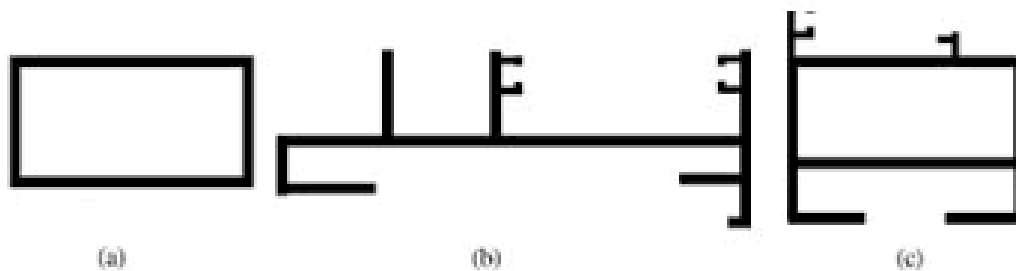
Przyjmujemy:  $d = 27\text{mm}$

Kąt skręcenia:  $\varphi = \frac{M_s \cdot l}{G \cdot I_0} = \frac{32 \cdot M_s \cdot l}{G \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{64 \cdot (1 + \nu) \cdot M_s \cdot l}{E \cdot \pi \cdot d^4} = 0,0903 \text{ (rad)}$

Przyjmujemy:  $\varphi = 5,17^\circ$



# POLITECHNIKA POZNAŃSKA



**DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ**  
*Zapraszam ponownie 😊*