POLITECHNIKA POZNAŃSKA

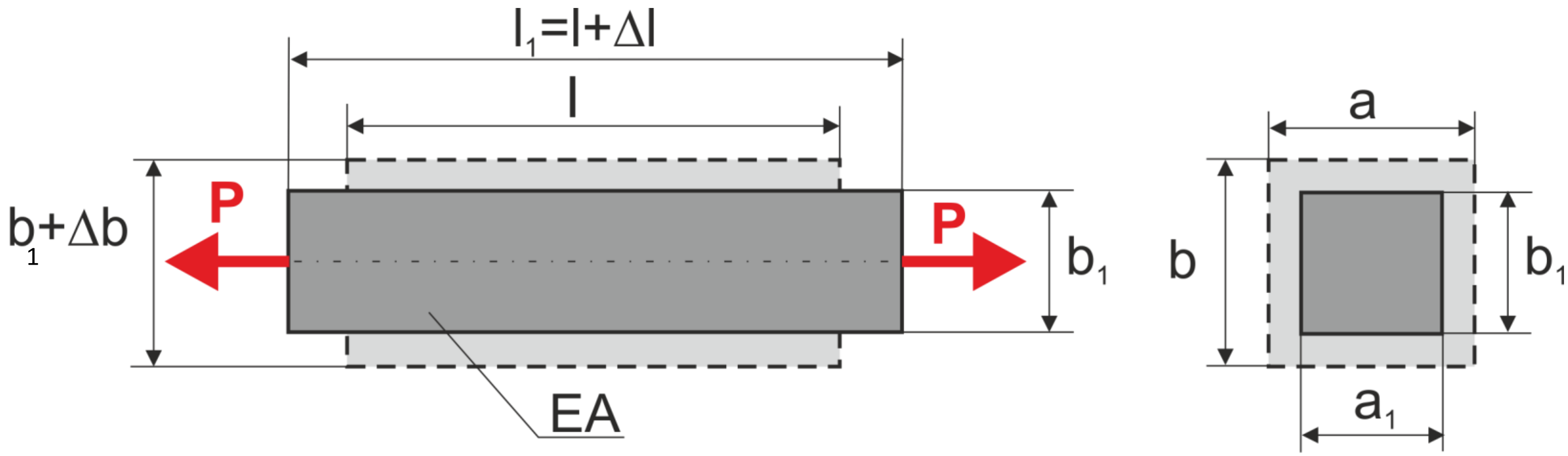
Wykład NR2 v. 4.0

ROZCIĄGANIE I ŚCISKANIE PRĘTA

dr hab. inż. Piotr PACZOS

Politechnika Poznańska,
Instytut Mechaniki Stosowanej,
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Równowaga STATYCZNA:



Δl : bezwzględny przyrost dlugosci [mm]

ε : wydlużenie względne

$$\sigma = \frac{N}{A} \qquad \sigma = E\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta l = l_1 - l \quad \rightarrow \quad l_1 = \Delta l + l$$
$$\Delta a = a_1 - a \quad \rightarrow \quad a_1 = \Delta a + a$$
$$\Delta b = b_1 - b \quad \rightarrow \quad b_1 = \Delta b + b$$

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}$$

Siméon Denis Poisson (ur. 21 czerwca 1781 w Pithiviers, zm. 25 kwietnia 1840 w Paryżu) – francuski mechanik teoretyk, fizyk i matematyk. Zajmował się elektrycznością, magnetyzmem, grawitacją, balistyką, astronomią i mechaniką. W matematyce zajmował się całkami oznaczonymi, równaniami różnicowymi i różniczkowymi oraz teorią prawdopodobieństwa.

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}$$

ε' - jednostkowa zmiana przekroju poprzecznego (przewężenia)

$$\varepsilon' = \varepsilon_{pop} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{pop} = -\nu\varepsilon$$

$$\nu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\text{poprzeczne}}{\text{podłużne}}\right|$$

ν - współczynnik Poissona (bezwymiarowy)

$$0 \le \nu \le 0.5$$

korek (ok. 0) guma (0.49)

$$\nu_{stal} = 0.3\ (0.31)$$

$$\nu_{alum} = 0.32\ (0.33)$$

Przybliżone wartości współczynnika Poissona dla różnych materiałów

Materiał	Współczynnik Poissona
Guma	~ 0,50
Magnez	0,35
Tytan	0,34
Miedź	0,33
Aluminium	0,33
Glina	0,30–0,45
Stal nierdzewna	0,30–0,31
Stal	0,27–0,30
Żeliwo	0,21–0,26
Piasek	0,20–0,45
Beton	0,20
Szkło	0,18–0,3
Korek	~ 0,00

Długość pręta po odkształceniu:

$$l_1 = \Delta l + l = l\left(\frac{\Delta l}{l} + 1\right) = l(\varepsilon + 1) = l(1 + \varepsilon)$$

Przekrój pręta po odkształceniu:

$$a_1 b_1 = (a - \Delta a)(b - \Delta b) = ab\left(1 - \frac{\Delta a}{a}\right)\left(1 - \frac{\Delta b}{b}\right) = ab(1 - \varepsilon')^2$$

Objętość pręta przed odkształceniem: $V = a \cdot b \cdot l$

Objętość pręta po odkształceniu: $V_1 = a_1 \cdot b_1 \cdot l_1$

stąd: $V_1 = a \cdot b \cdot l(1 + \varepsilon)\left(1 - 2\varepsilon' + \varepsilon'^2\right) = a \cdot b \cdot l\left(1 - 2\varepsilon' + \cancel{\varepsilon'^2} + \varepsilon - \cancel{2\varepsilon'\varepsilon} + \cancel{\varepsilon'^2\varepsilon}\right)$

ε - jest wielkością małą

Pomijamy wielkości małe I RZĘDU – kwadraty epsilon i jego iloczyny.

Mamy więc:

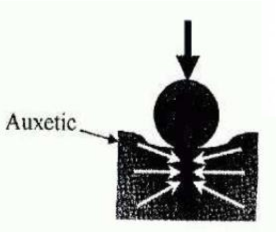
$$V_1 = a \cdot b \cdot l\left(1-2\varepsilon' + \varepsilon\right) = a \cdot b \cdot l\left(1-2\nu\varepsilon+\varepsilon\right) = a \cdot b \cdot l\left[1+\varepsilon\left(1-2\nu\right)\right]$$

Obliczona względna zmiana objętości pręta wynosi:

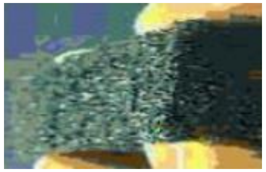
$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V_1 - V}{V} = \frac{a \cdot b \cdot l\left[1+\varepsilon\left(1-2\nu\right)\right] - a \cdot b \cdot l}{a \cdot b \cdot l} = \varepsilon\left(1-2\nu\right)$$

Dla $\nu = 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{\Delta V}{V} = \varepsilon\left(1-2\nu\right) = \varepsilon$ korek

$\nu = 0.5 \quad \rightarrow \quad \dfrac{\Delta V}{V} = \varepsilon\left(1-2\nu\right) = 0$ guma



Rok 2001 – objętość nie może się zmniejszać !!!



Rok 2008 – ujemna liczna Poissona
Materiał AUKSETYCZNY!!!

Zasada De Saint Venanta:

Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant
(ur. 23 sierpnia 1797 w Villiers-en-Bière, Seine-et-Marne, zm. 6 stycznia 1886 w St. Ouen, Loir-et-Cher) – inżynier francuski.

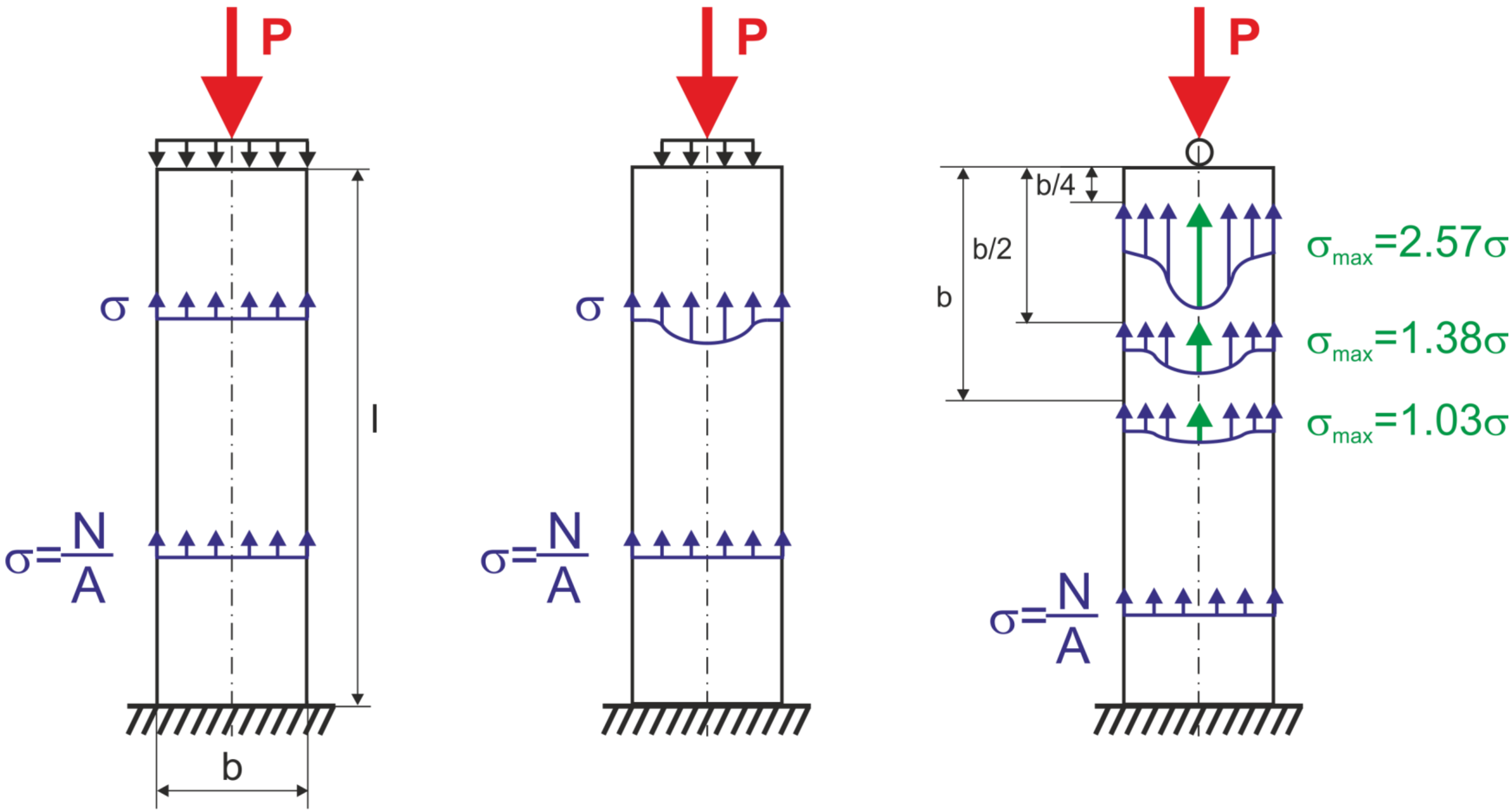
Studiował w Ecole Polytechnique w Paryżu (1813–1816) i przez wiele lat pracował w służbie państwowej jako inżynier oraz wykładowca. Jego zainteresowaniami naukowymi były sprężystość, wytrzymałość materiałów, teoria plastyczności oraz hydraulika.

W 1871 wybrany na członka Francuskiej Akademii Nauk.

Z jego nazwiskiem wiąże się m.in. zasada de Saint-Venanta
(teoria sprężystości, stworzona w 1855 roku).

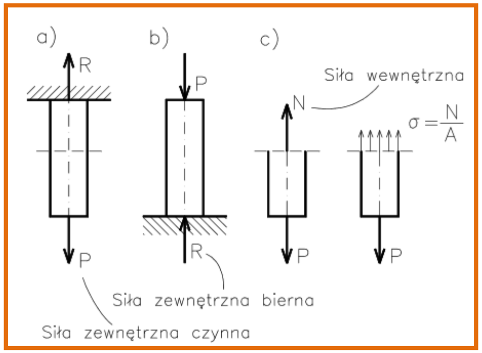
Stały, jednorodny rozkład naprężeń.
ZASADA De Saint-Venanta
Jeżeli na dany układ sił zewnętrznych działających na mały obszar ciała sprężystego w równowadze zastąpimy innym układem statycznie równoważnym to w odległości od obszaru przewyższającej jego rozmiary powstają praktycznie jednostajne (jednakowe) stany naprężeń

Rozważamy pręt pryzmatyczny (stałe pole przekroju na całej długości)



WNIOSEK:
Jeżeli odsuniemy się na pewną odległość od przyłożonej siły zewnętrznej (dowolnej siły) to nie jest istotne jaką siłę przyłożymy.

DEFINICJA Sił Wewnętrznych
Siłą wewnętrzną N w przekroju poprzecznym pręta nazywamy algebraiczną sumę wszystkich sił zewnętrznych (w tym reakcji podporowych) po jednej dowolnej stronie myślowego przekroju.



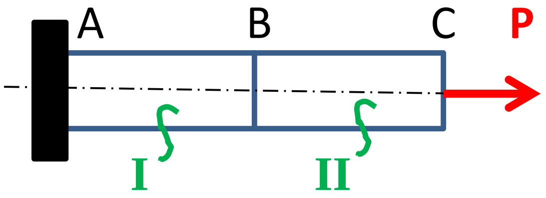
Obok założenia jednorodności oraz właściwości izotropowych materiału, z którego wykonano pręt zakłada się, że podczas działania siły normalnej przekrój pręta pozostaje płaski czyli nie ulega spaczeniu.
Jest to tak zwana **hipoteza płaskich przekrojów**. Konsekwencją tej hipotezy będzie fakt, że rozkład naprężeń normalnych na całej powierzchni przekroju będzie **stały**.

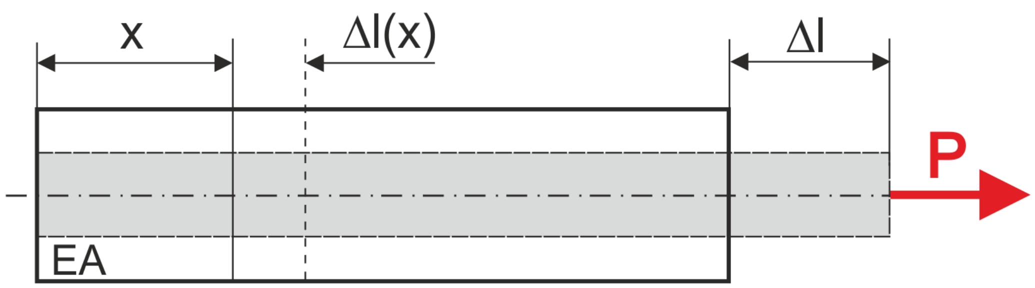
POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Zasada Superpozycji:

Zasada SUPERPOZYCJI mówi o tym, że w układach liniowo sprężystych wielkość końcowa, np. przemieszczenie, naprężenie, itp. jest równa algebraicznej sumie wielkości cząstkowych.

$$\Delta l_{cal} = \Delta l_{I} + \Delta l_{II} = \Delta l_{BA} + \Delta l_{CB}$$





$$\Delta l\left(x\right) = \frac{N \cdot x}{E \cdot A}$$

Wydłużanie spowodowane zmianą TEMPERATURY:

$$\Delta l = \sum_i \frac{N_i\, l_i}{A_i\, E_i}$$

Przy rozwiązywaniu wielu problemów praktycznych, oprócz wydłużeń spowodowanych przez naprężenia σ, należy wziąć również pod uwagę wydłużenia wywołane zmianą temperatury.

W tym przypadku można zastosować ***zasadę superpozycji***, w myśl której odkształcenia całkowite ε mogą być obliczane jako ***algebraiczna suma*** odkształceń pochodzących od obciążenia zewnętrznego i od zmiany temperatury

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha\,\Delta t$$

gdzie α jest *współczynnikiem rozszerzalności cieplnej* materiału.

Dla pręta jednorodnego obciążonego w przekrojach końcowych i równomiernie nagrzewanego, mamy:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} + l\alpha\,\Delta t$$

Odkształcenia wywołane siłami zewnętrznymi oraz zmianą temperatury możemy uważać za niezależne. Powodem takiego stwierdzenia jest fakt ustalony doświadczalnie, że moduł sprężystości podłużnej E zmienia się nieznacznie wraz z temperaturą przy umiarkowanym wzroście temperatury, a współczynnik przewodności cieplnej α jest praktycznie niezależny od σ. Dla stali warunki te są spełnione dla temperatur do 400°C.
W wyższych temperaturach należy koniecznie wziąć pod uwagę zależność E od temperatury.

Przykład NR1

Dla podanego pręta sporządzić wykres sił podłużnych, naprężeń oraz przemieszczeń przekrojów poprzecznych.

Dane:

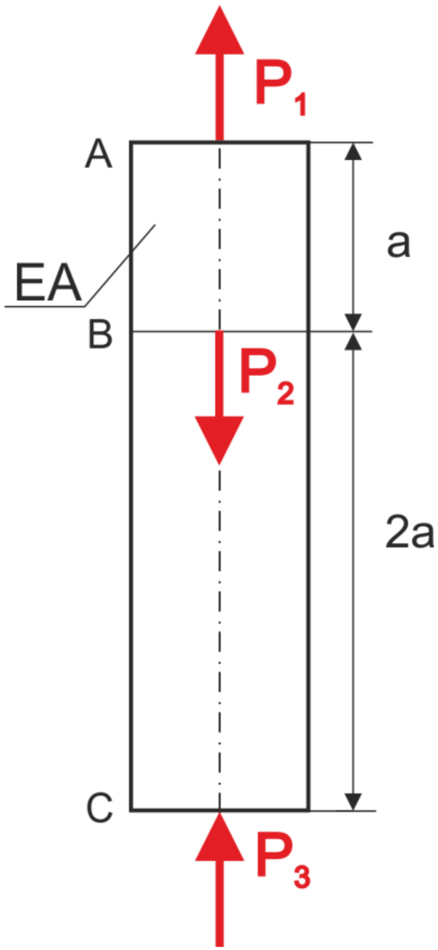
$P_1 = 2P$

$P_2 = 3P$

$P_3 = 1P$

A, E, a

Przedziały nieciągłości



EA – sztywność rozciągania

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

WYDŁUŻENIA

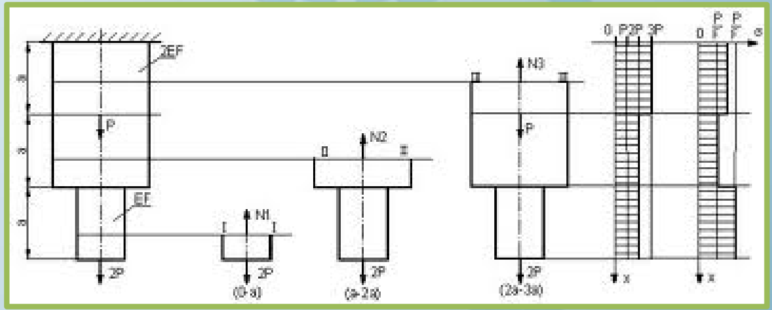
Bezwzględne - przemieszczenia

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}$$

Względne

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E_i}$$

E_i – moduł sprężystości podłużnej



DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

Zapraszam ponownie ☺