POLITECHNIKA POZNAŃSKA

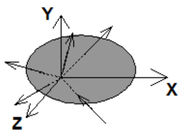
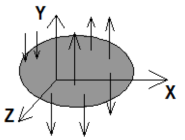
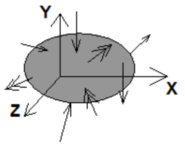
Wykład NR4 v. 4.0

WYTRZYMAŁOŚĆ PRĘTÓW PROSTYCH PRZY ROZCIĄGANIU I ŚCISKANIU

dr hab. inż. Piotr PACZOS

Politechnika Poznańska,
Instytut Mechaniki Stosowanej,
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Warunki równowagi dla przestrzennych i płaskich układów sił

Układ sił	Warunki równowagi
 Zbieżny układ sił	1. $\sum_{i=1}^{n} P_{xi}=0$ 2. $\sum_{i=1}^{n} P_{yi}=0$ 3. $\sum_{i=1}^{n} P_{zi}=0$
 Równoległy układ sił	1. $\sum_{i=1}^{n} P_{yi}=0$ 2. $\sum_{i=1}^{n} M_{xi}=0$ 3. $\sum_{i=1}^{n} M_{zi}=0$ (dotyczy sił równoległych w kierunku osi Y)
 Układ sił dowolnie skierowanych	1. $\sum_{i=1}^{n} P_{xi}=0$ 2. $\sum_{i=1}^{n} P_{yi}=0$ 3. $\sum_{i=1}^{n} P_{zi}=0$ 4. $\sum_{i=1}^{n} M_{Xi}=0$ 5. $\sum_{i=1}^{n} M_{Yi}=0$ 6. $\sum_{i=1}^{n} M_{Zi}=0$

zbieżny

prętowo-belkowy

belka zamocowana przegubowo

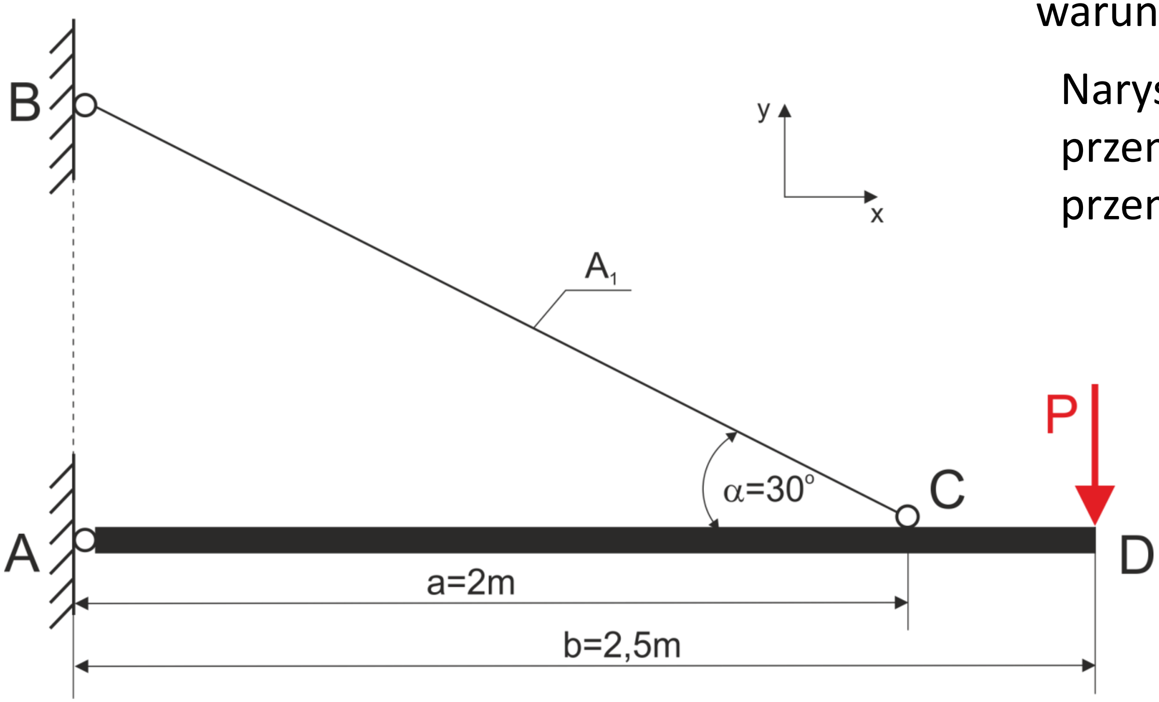
belka swobodnie podparta (podtrzymywana)

ZADANIE 1

Nieodkształcalne belka AD jest podtrzymywana przez pręt BC i obciążona na swoim swobodnym końcu siłą skupioną P o wartości 39,2 kN.

Wyznaczyć naprężenia w pręcie BC oraz sprawdzić warunek wytrzymałości pręta.

Narysować rysunek geometryczny przemieszczeń i wyznaczyć przemieszczenie punktu D.



Dane:

k_r = 160 MPa

k_c = 130 MPa

A_1 = 6,16 cm^2

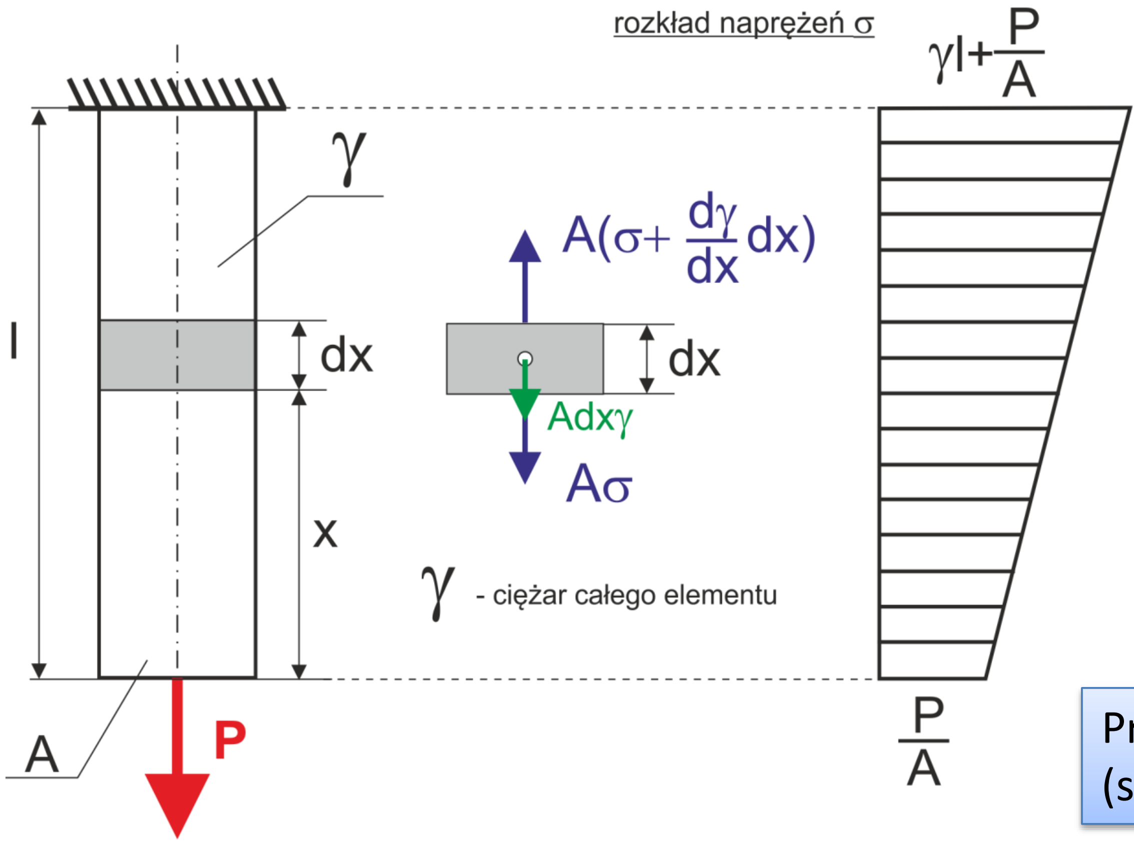
P = 39,2 kN

E = 2x10^5 MPa

l = 1 m

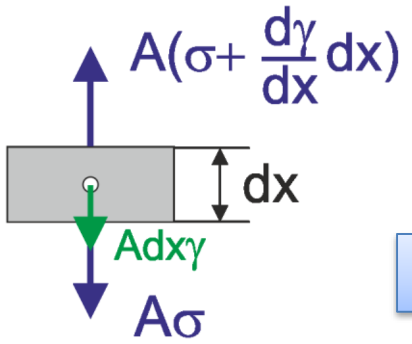
POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wpływ ciężaru własnego przy rozciąganiu i ściskaniu (pręty o równomiernej wytrzymałości)



Pręt pryzmatyczny o niezmiennym (stałym) polu przekroju

1. Warunek równowagi sił działających na element **dx** ma postać:



$$\sum F_x = 0: \quad A\left(\sigma + \frac{d\gamma}{dx}dx\right) - A\sigma - A\gamma dx = 0$$

$$\frac{d\gamma}{dx} = \gamma$$

Po obustronnym scałkowaniu uzyskujemy:

$$\sigma = \gamma x + C$$

Stałą całkowania C znajdujemy z warunku brzegowego dla x=0:

$$\sigma\big|_{x=0} = \frac{P}{A} \quad \text{stąd} \quad C = \frac{P}{A}$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

2. Naprężenia normalne

Otrzymujemy wówczas: $$\sigma = \gamma x + \frac{P}{A}$$ dla x=l: $$\sigma = \gamma l + \frac{P}{A}$$

3. Obliczamy wydłużenie pręta:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \left(\gamma x + \frac{P}{A} \right) \frac{1}{E} = (\gamma x A + P) \frac{1}{EA}$$

EA – sztywność na rozciąganie

4. Wydłużenie bezwzględne elementu **dx**:

$$\Delta dx = \varepsilon dx$$

$$\varepsilon dx = \frac{\gamma x A + P}{EA} dx$$

Δdx – przyrost długość elementu dx

$$\varepsilon dx = \frac{\gamma x A + P}{EA} dx$$

Po scałkowaniu otrzymujemy całkowite wydłużenie pręta:

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dx = \int_0^l \frac{P + \gamma x A}{EA} dx = \frac{Pl}{EA} + \frac{\gamma l^2}{2EA}$$

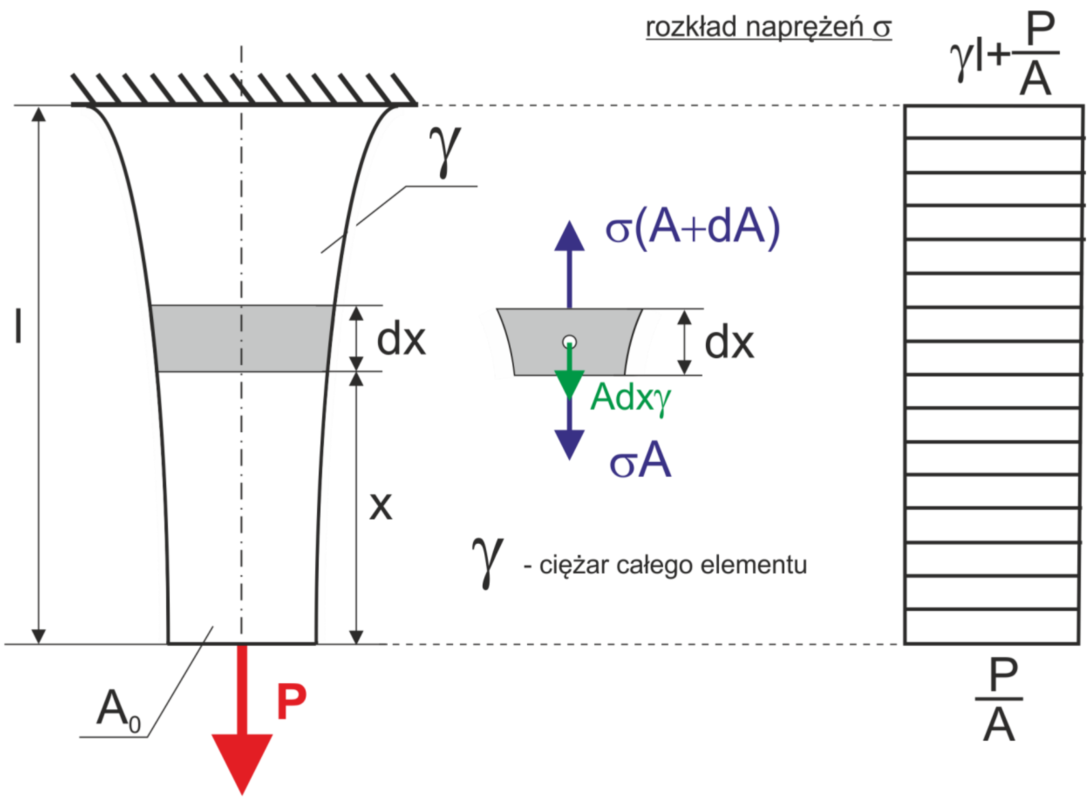
Podstawiając $Q = Al\gamma$

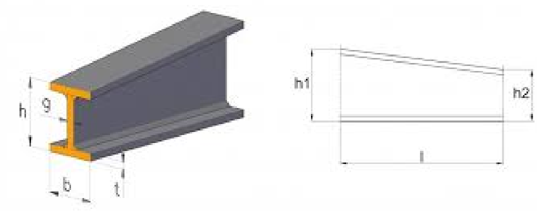
Otrzymujemy zatem:

$$\Delta l == \frac{Pl}{EA} + \frac{1}{2}\frac{Ql}{EA^2}$$

PROBLEM ???

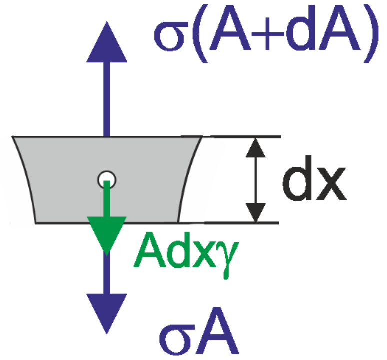
Jaki powinien być przekrój pręta, aby naprężenia normalne wzdłuż długości były stałe – constans ?





Pręt pryzmatyczny o zmiennym polu przekroju

1. Warunek równowagi sił działających na element **dx** ma postać:



$$\sum F_x = 0: \quad \sigma\left(A + dA\right) - \sigma A - A\gamma dx = 0$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{\gamma}{\sigma} dx$$

Po obustronnym scałkowaniu uzyskujemy:

$$\ln A = \frac{\gamma}{\sigma} x + C$$

Stałą całkowania C wyznaczamy z warunku wytrzymałości (z dołu pręta) bez uwzględnienie ciężaru własnego dla x=0, mamy:

$$A = A_0 = \frac{P}{\sigma}$$

stąd:

$$C = \ln \frac{P}{A} = \ln A_0$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

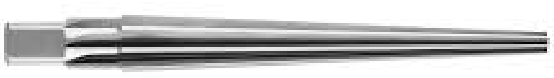
Wracając mamy:

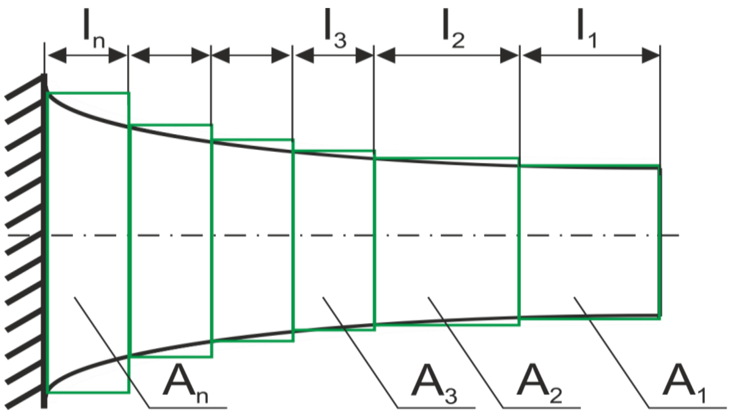
$$\ln A = \frac{\gamma}{\sigma}x + C \qquad C = \ln\frac{P}{A} = \ln A_0$$

$$\ln A = \frac{\gamma}{\sigma}x + \ln A_0 \rightarrow \ln\frac{A}{A_0} = \frac{\gamma}{\sigma}x$$

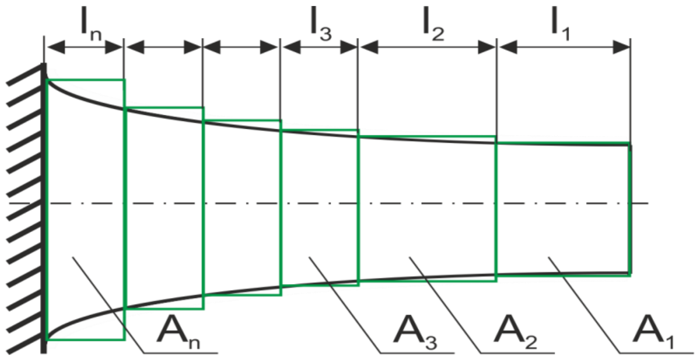
$$A_0 e^{\frac{\gamma}{\sigma}x} = A \rightarrow A = \frac{P}{\sigma}e^{\frac{\gamma}{\sigma}x}$$

W praktyce pręt o równej wytrzymałości na rozciąganie wykonuje się jako pręt o skokowo zmiennym przekroju:





POLITECHNIKA POZNAŃSKA



Przekrój A_1 elementu o długości l_1 wyliczamy ze wzoru:

$$\sigma = \gamma l + \frac{P}{A}$$

$$A_1 = \frac{P}{\sigma - \gamma l_1}$$

Pole przekroju A_2 dla kolejnej części wynosi:

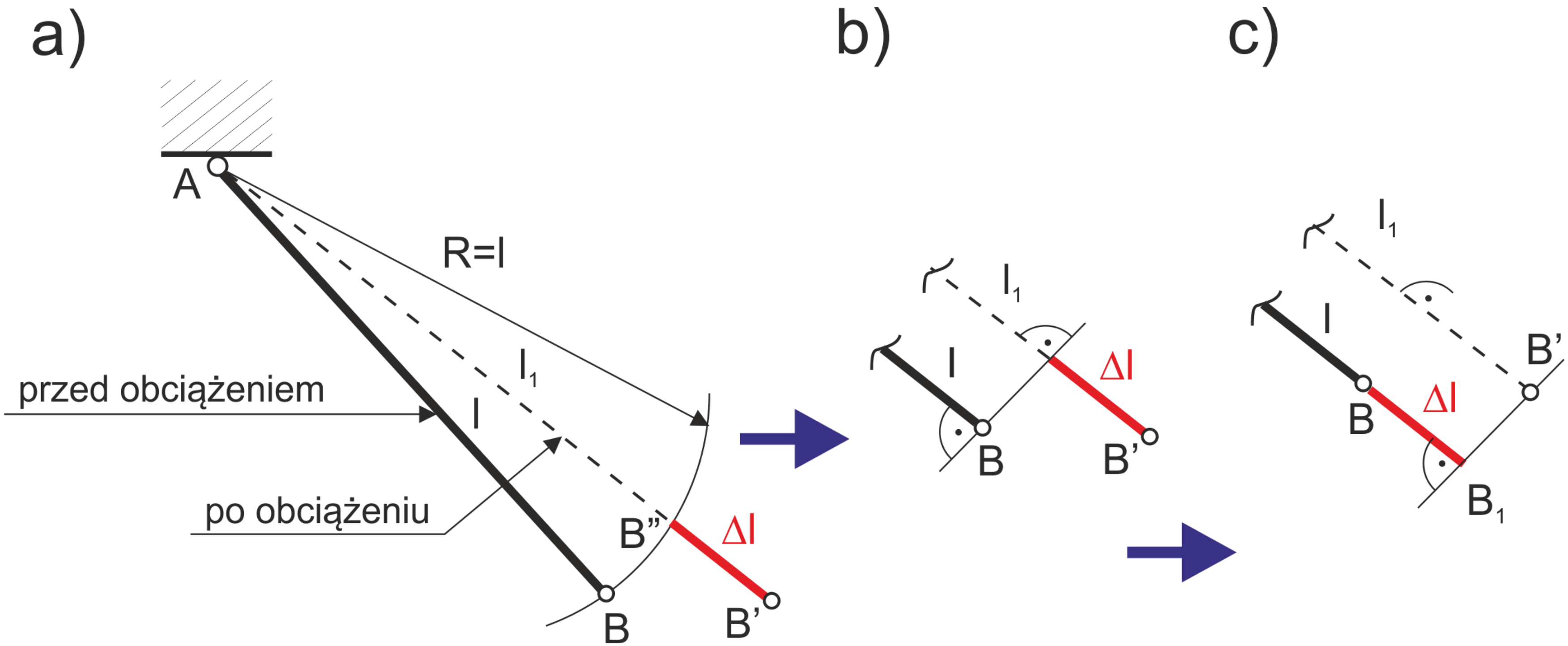
$$A_2 == \frac{A_1 \sigma}{\sigma - \gamma l_2} = \frac{P\sigma}{(\sigma - \gamma l_1)(\sigma - \gamma l_2)}$$

Dla kolejnej n-tej części mamy:

$$A_n = \frac{P\sigma^{n-1}}{(\sigma - \gamma l_1)(\sigma - \gamma l_2)\cdot \ldots \cdot(\sigma - \gamma l_n)}$$

Jeżeli $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = \dfrac{l}{n}$ to $A_n = \dfrac{P}{\sigma} \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{n}\dfrac{\gamma}{\sigma}\right)^n}$

Obliczanie przemieszczeń w układach statycznie wyznaczalnych (3 sposoby)

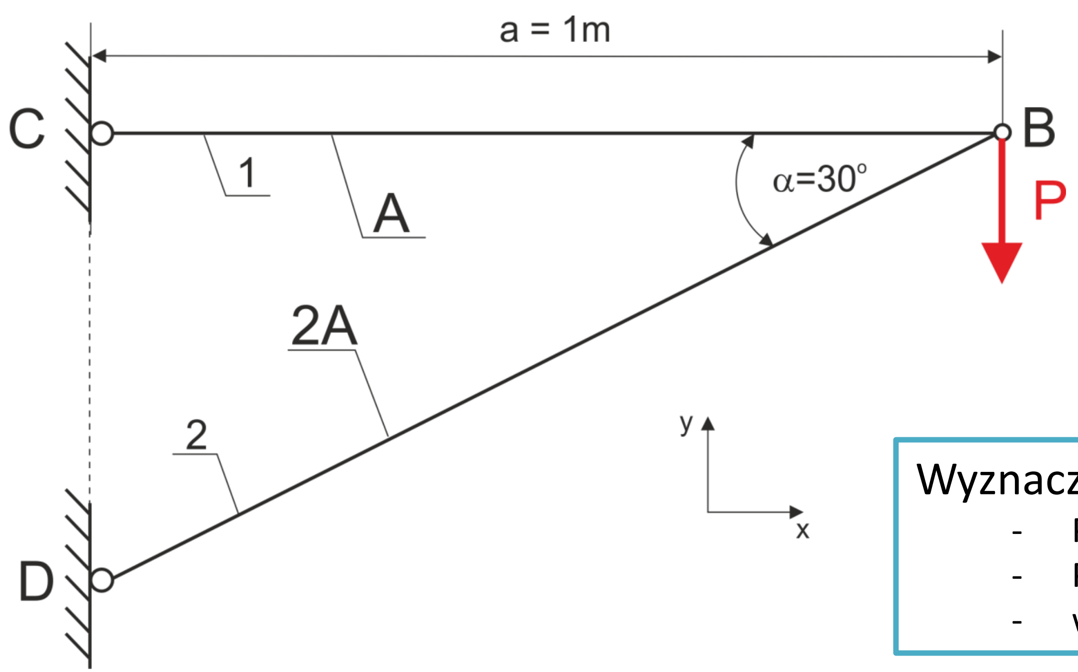


Obliczanie przemieszczeń

ZADANIE 2

Dla układu prętowego przedstawionego na rysunku obliczyć dopuszczalne pole przekroju A, oraz przemieszczenie przegubu B jeżeli pręty zostały wykonane ze stali o module sprężystości podłużnej E=2x10^5 MPa.

Narysować rysunek geometryczny przemieszczeń.



Dane:

P = 2 kN

k_r = 160 MPa

k_c = 120 MPa

Wyznaczyć przemieszczenie węzła „B"

- Pionowe: u_B
- Poziome: v_B
- wypadkowe

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Układy prętowe statycznie niewyznaczalne (SNW)

1. Układ SNW bez czynników dodatkowych
2. Zagadnienia termiczne
3. Zagadnienia montażowe

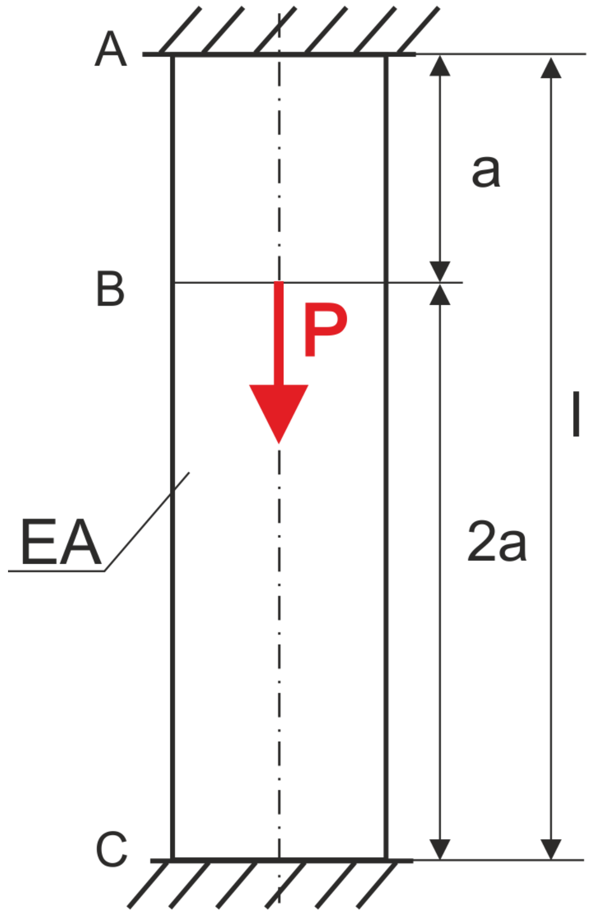
Z układem prętowym **statycznie niewyznaczalnym** mamy do czynienia wówczas, gdy liczba równań równowagi statycznej jest mniejsza od liczby niewiadomych. **(sił wewnętrznych N_i oraz reakcji podporowych R_i)**

NIEWYZNACZALNOŚĆ wynika z podparcia pręta.

Brakujące RÓWNANIA budujemy w oparciu o analizę przemieszczeń układu. Przemieszczenie to różnica mierzona po odkształceniu i przed odkształceniem.

Korzystamy z Prawa Hooke'a: $$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}$$

WARUNEK WYTRZYMAŁOŚCI to zawsze NIERÓWNOŚĆ.



ZADANIE 3

Dla obustronnie utwierdzonego pręta obciążonego siłą skupioną P, zapisać równanie geometryczne przemieszczeń oraz obliczyć i narysować wykresy wewnętrznych sił normalnych, naprężeń normalnych oraz przemieszczeń.

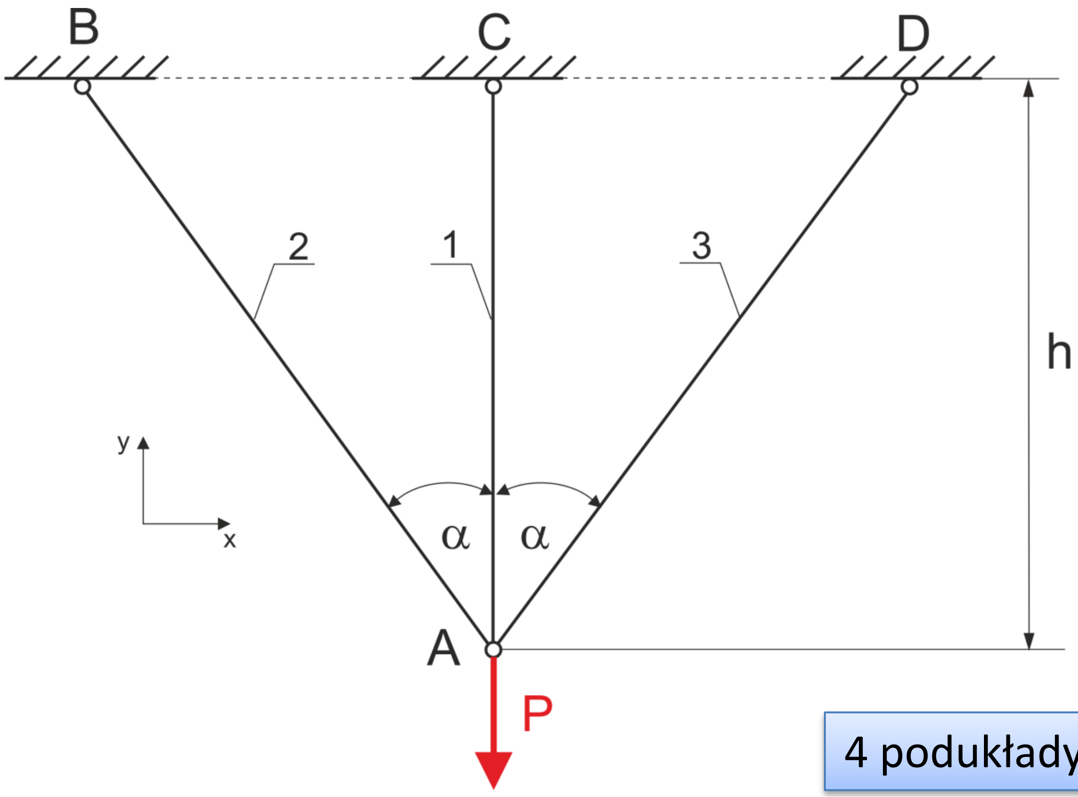
Pręt na całej długości został wykonany z tego samego materiału o tym samym polu przekroju = stała sztywność *EA* - constans

METODY:

1. Myślowe odrzucenie podpór
2. Porównywanie przemieszczeń

ZADANIE 4

Dla układu prętowego przedstawionego na rysunku obliczyć naprężenia w prętach oraz przemieszczenie przegubu A jeżeli pręty zostały wykonane ze stali o tym samym module sprężystości podłużnej E=2x10^5 MPa.



Dane:

P = 20 kN

$k_r = k_c$ = 140 MPa

$A = A_1 = A_2 = A_3$ = 3 cm^2

$E = E_1 = E_2 = E_3$

h = 1 m

4 podukłady, gdyż ściana nie przenosi obciążeń

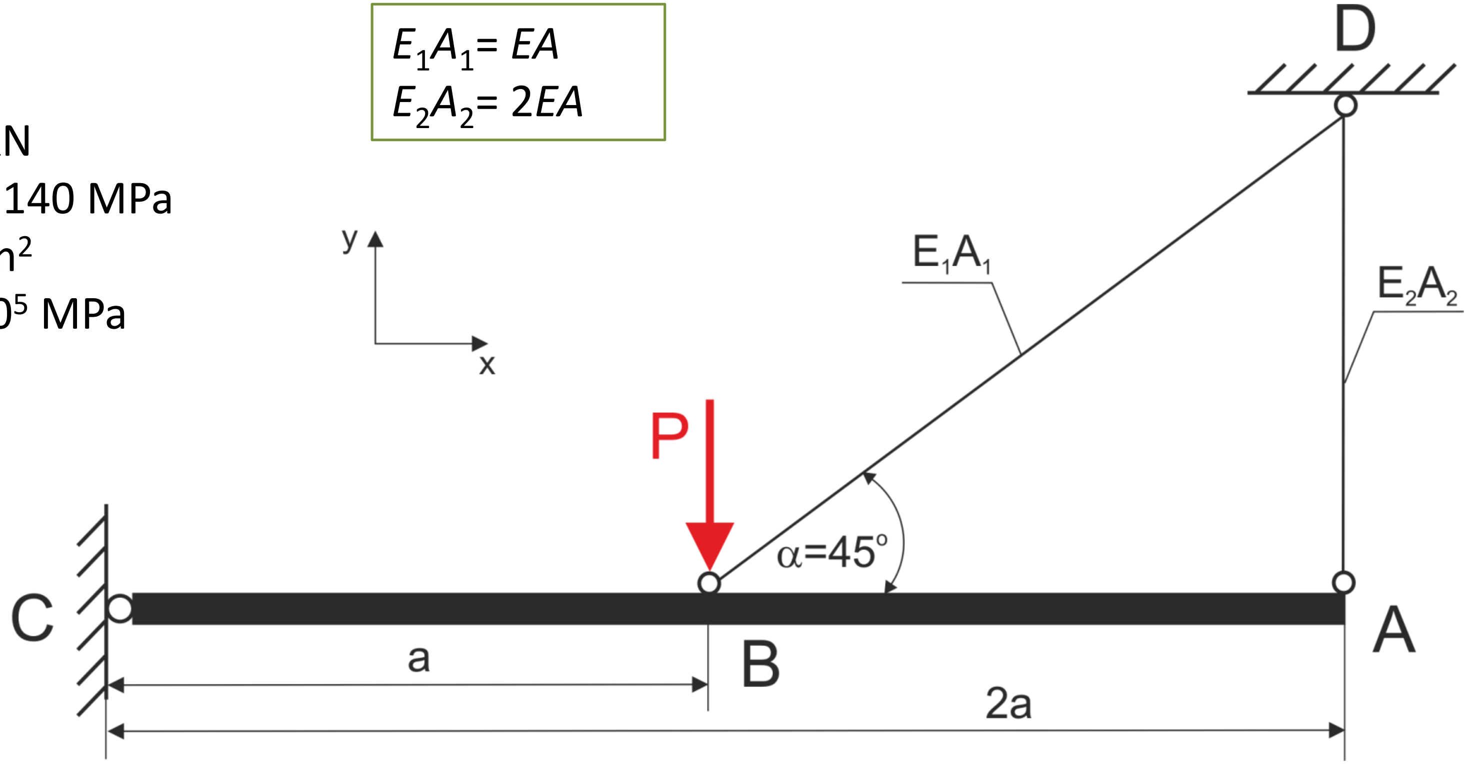
ZADANIE 5

Dla układu prętowego-belkowego przedstawionego na rysunku obliczyć siły w prętach oraz narysować rysunek przemieszczeń i policzyć przemieszczenie przegubu A .

$E_1A_1 = EA$
$E_2A_2 = 2EA$

Dane:

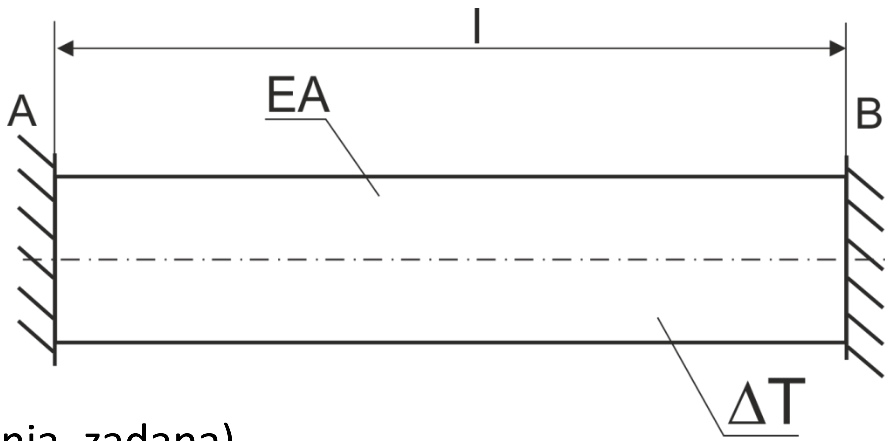
P = 20 kN
$k_r = k_c$ = 140 MPa
A = 3 cm^2
E = 2x10^5 MPa
a = 1 m



Naprężenia TERMICZNE

Naprężenia termiczne są wywołane zmianą temperatury jednego lub wielu elementów w układzie statycznie niewyznaczalnym w stosunku do temperatury montażu.

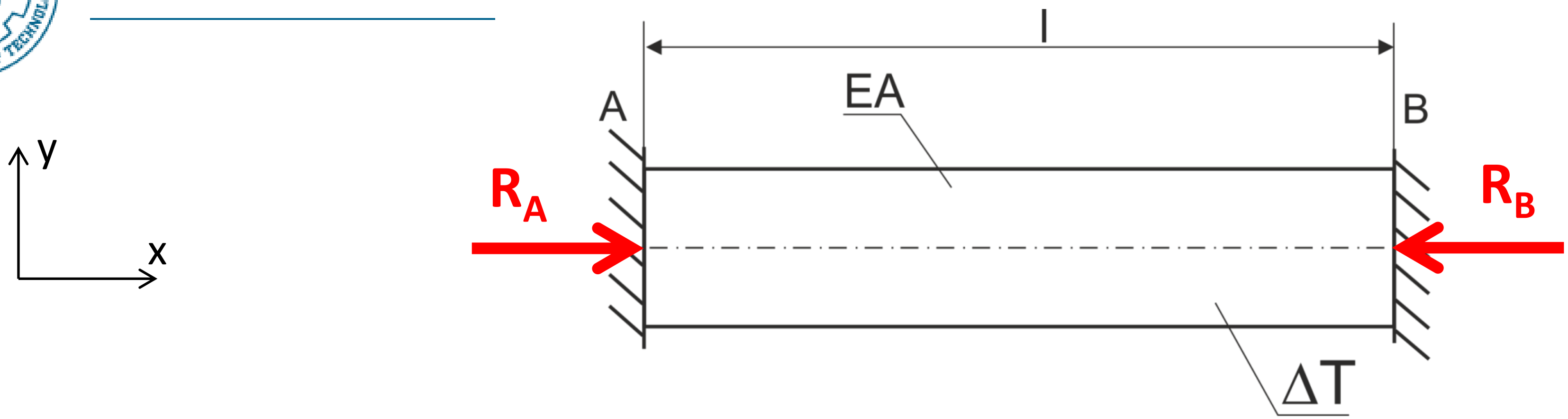
$$\Delta T = T_1 - T_m$$



T_1 – temperatura właściwa (otoczenia, zadana)
T_m – temperatura montażu

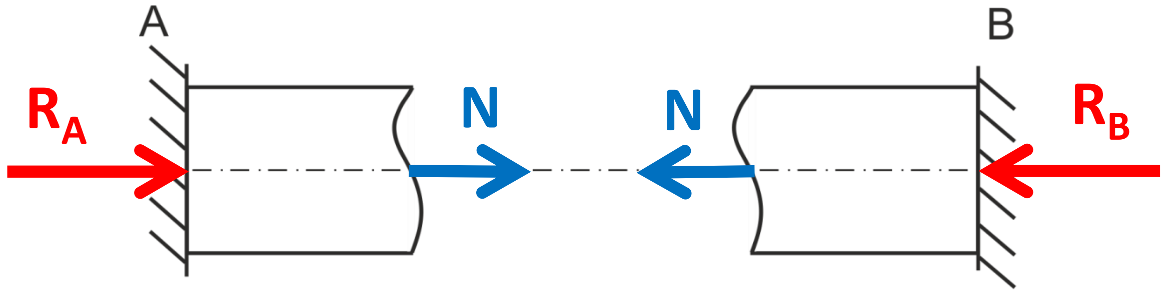
$$\Delta l^T = l\alpha_T \Delta T$$

α – współczynnik rozszerzalności liniowej

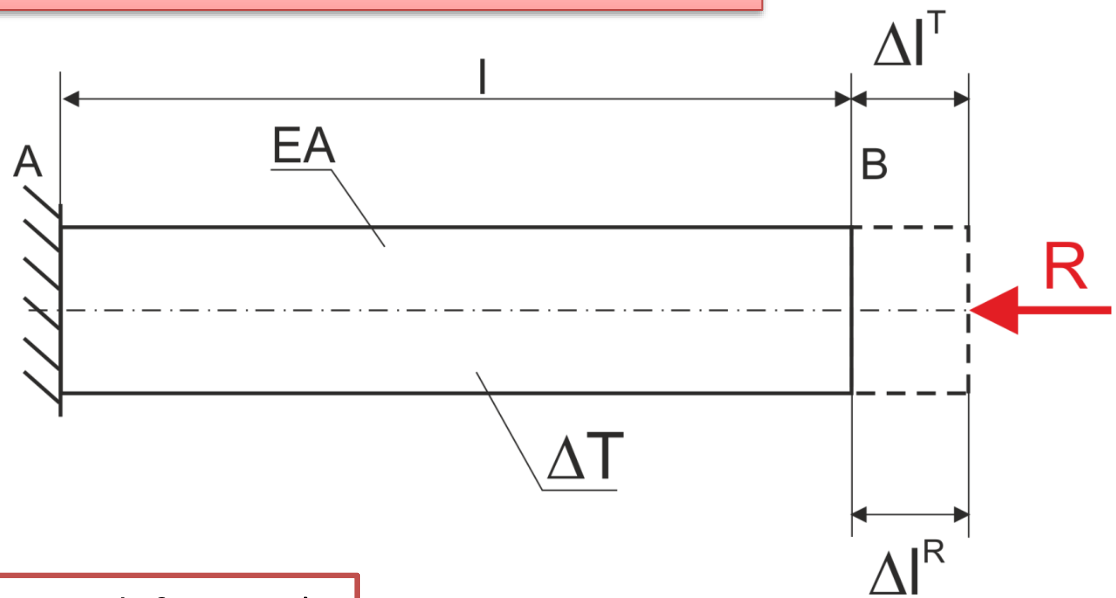


$$\sum F_x = 0: \quad R_A - R_B = 0 \rightarrow R_A = R_B = R$$

Układ jednokrotnie statycznie niewyznaczalny : 2N – 1RS = U1SNW



Odrzucamy jedną podporę i otrzymujemy układ uwolniony:



$$\Delta l^T = \Delta l^R$$

Liczymy z Prawa HOOKE'A (związek fizyczny):

$$\Delta l^R = \frac{Nl}{EA} = \frac{Rl}{EA}$$

$$\boxed{\Delta l^{T} = \Delta l^{R}}$$

$$\boxed{\Delta l^{T} = l\alpha_T \Delta T}$$

$$\boxed{\Delta l^{R} = \frac{Nl}{EA} = \frac{Rl}{EA}}$$

$$\boxed{N = R = EA\alpha_T \Delta T}$$

Naprężenia:

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A} = \frac{EA\alpha_T \Delta T}{A} = E\alpha_T \Delta T}$$

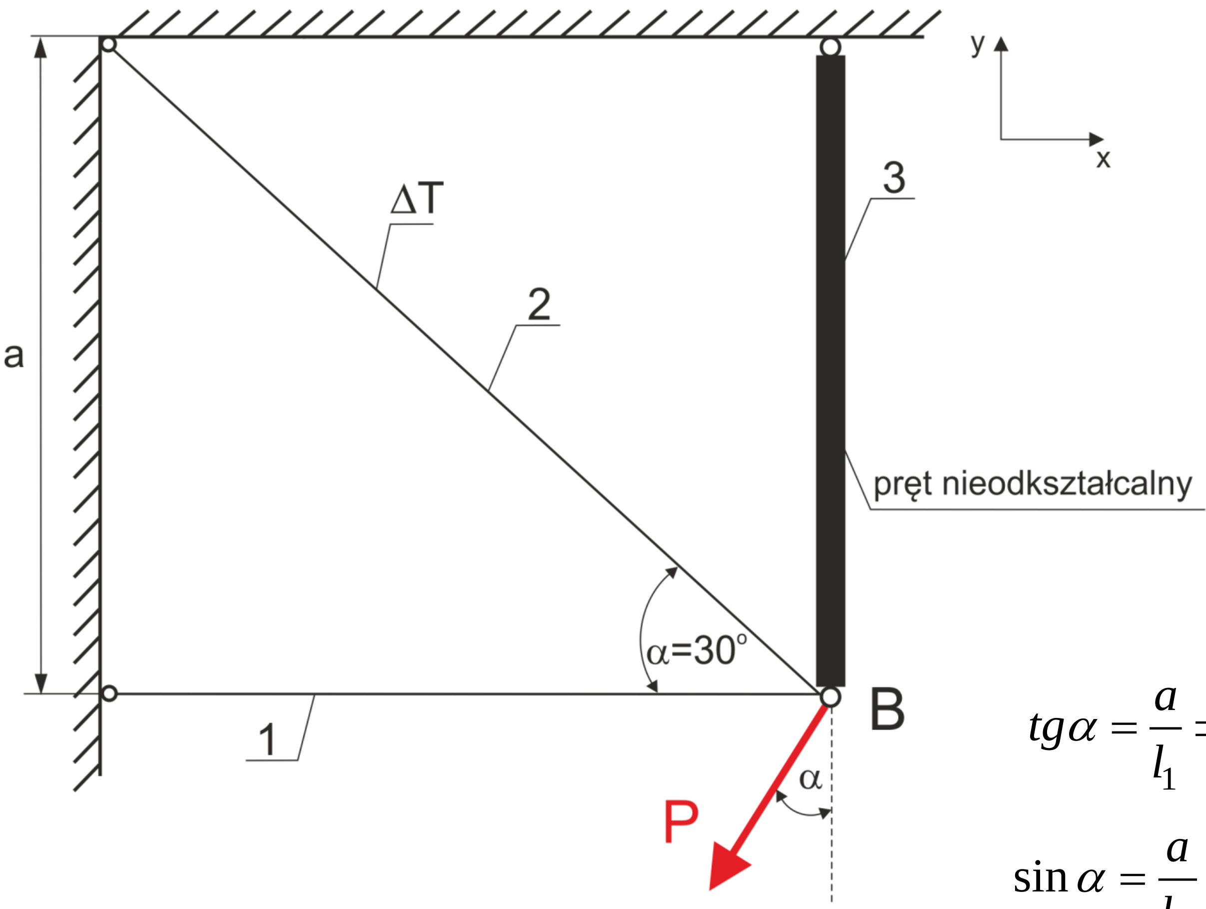
$$\alpha_T \left[\frac{1}{{}^{o}C} \right]$$

$$\boxed{\sigma^{T} = E\alpha_T \Delta T}$$

WNIOSEK:
Naprężenia termiczne nie zależą od pola przekroju

ZADANIE 6

Dla układu prętowego przedstawionego na rysunku obliczyć naprężenia w prętach jeżeli pręt 2 został podgrzany o ΔT oraz policzyć przemieszczenie węzła B.



Dane:

$P,\ a,\ \Delta T,$

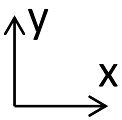
$A_1 = A_2 = A,$

$E_1 = E_2 = E$

$$tg\alpha = \frac{a}{l_1} \Rightarrow l_1 = \frac{a}{tg\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{l_2} \Rightarrow l_2 = \frac{a}{\sin\alpha}$$

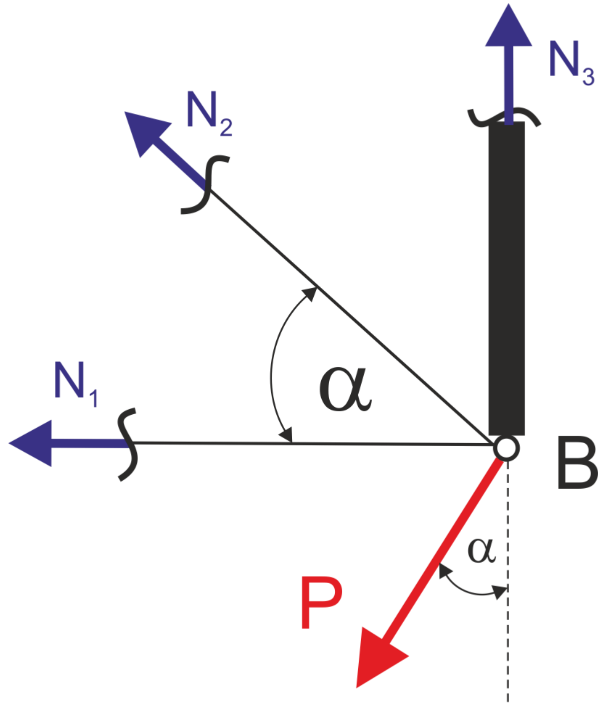
POLITECHNIKA POZNAŃSKA



Równania Równowagi Statycznej:

$$(1) \quad \sum F_x = 0: -N_1 - N_2 \cos\alpha - P \sin\alpha = 0$$

$$(2) \quad \sum F_y = 0: \quad N_3 + N_2 \sin\alpha - P \cos\alpha = 0$$



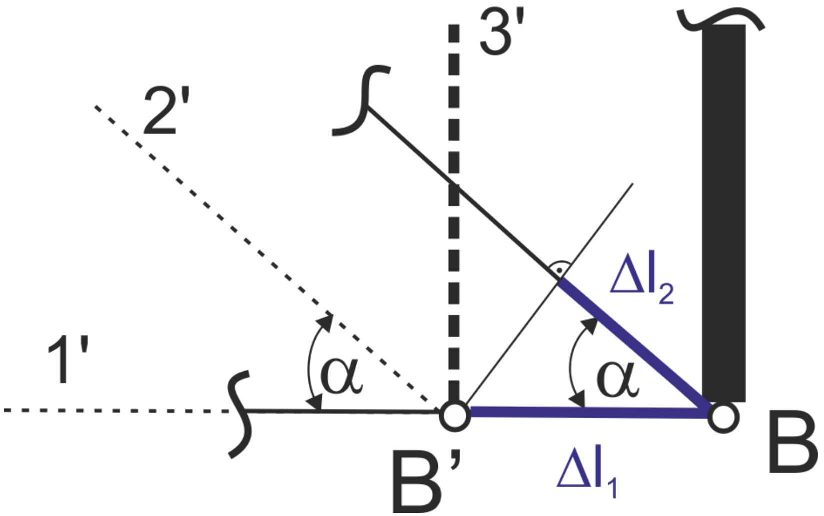
3 Niewiadome – 2 Równania Statyki = U1SNW
układ jednokrotnie statycznie niewyznaczalny

Brakujące równanie budujemy w oparciu o analizę przemieszczeń węzła B

Rysunek geometryczny przemieszczeń:

$$\Delta l_1 = \Delta l_1^{(N_1)}$$

$$\Delta l_2 = \pm \Delta l_2^{(N_2)} \pm \Delta l_2^{T}$$



+/- : zgodność lub brak zgodności przyczyny i skutku (skutek: wydłużenie (+), skrócenie (-))

(*) Związek fizyczny

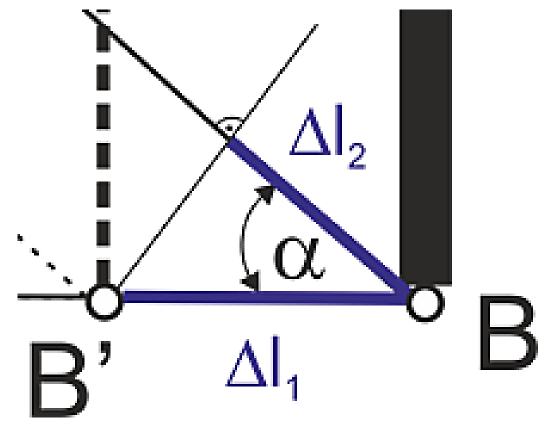
$$\Delta l_1^{(N_1)} = -\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} \qquad \Delta l_2^{(N_2)} = -\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$$

$$\Delta l_2^{T} = -l_2 \alpha_T \Delta T$$

Znaki ustalamy po analizie

Podgrzany pręt zwiększa swoją długość

Z geometrii przemieszczeń:



Związek geometryczny:

$$\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \cos\alpha \Rightarrow \Delta l_2 - \Delta l_1 \cos\alpha = 0$$

PODSTAWIAJĄC otrzymujemy:

$$l_2 = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$-N_2 \frac{a}{EA\sin\alpha} - l_2 \alpha_T \Delta T - \left(-N_1 \frac{a}{EA tg\alpha}\right)\cos\alpha = 0$$

ANALIZA ZNAKU

$$\boxed{(3) \quad N_2 + EA\alpha_T \Delta T - N_1 \cos^2\alpha = 0}$$

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
(1) & -N_1 - N_2\cos\alpha - P\sin\alpha = 0 \\
(2) & N_3 + N_2\sin\alpha - P\cos\alpha = 0 \\
(3) & N_2 + EA\alpha_T\Delta T - N_1\cos^2\alpha = 0
\end{array}
}
$$

Rozwiązując (3) i (1) wyznaczamy N_1 i N_2

Dalej korzystając z definicji wyznaczamy naprężenia:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A}$$

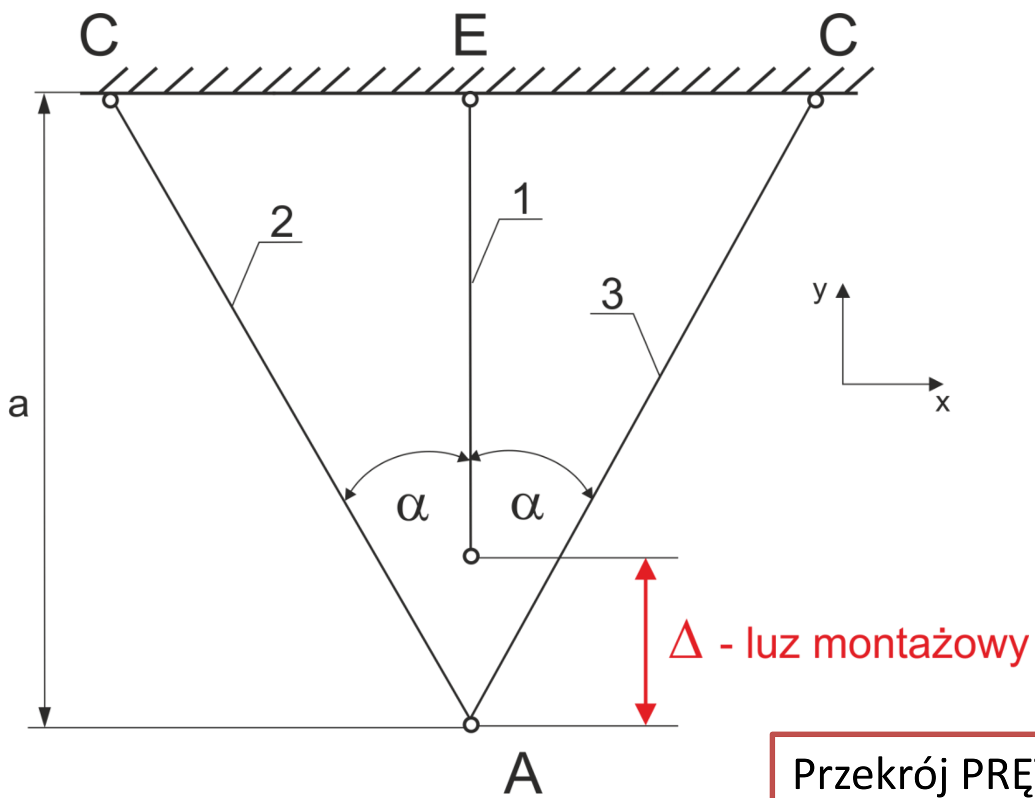
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A}$$

Naprężenia termiczne NIE występują w układach statycznie wyznaczalnych !!!
Pręt się wydłuża wskutek naprężeń wywołanych zmianą temperatury.

Naprężenia MONTAŻOWE

ZADANIE 7

Dla układu prętowego przedstawionego na rysunku obliczyć naprężenia w prętach po zmontowaniu układu, jeżeli pręty zostały wykonane ze stali o tym samym module sprężystości podłużnej E=2x10^5 MPa.



Dane:

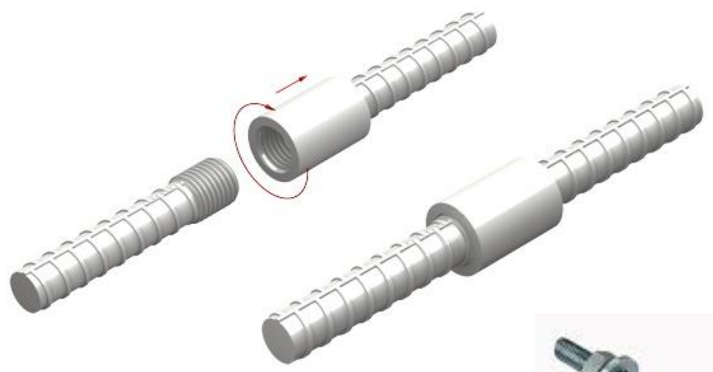
P, a, Δ,

$A_1 = A_2 = A_3 = A$,

$E_1 = E_2 = E_3 = E$

Przekrój PRĘTA nie ma wpływu na NAPRĘŻENIA !!!

Kierunek REAKCJI musi być zawsze zgodny z kierunkiem osi PRĘTA, jeżeli rozciągany lub ściskany pręt jest połączony otoczeniem.



DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

Zapraszam ponownie ☺