POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wykład NR1 v. 6.0 (SEM IV)

ZGINANIE BELEK

dr hab. inż. Piotr PACZOS

Politechnika Poznańska,
Instytut Mechaniki Stosowanej,
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Teorii belek: teoria Eulera-Bernoulliego (18 stulecie)

1. Najstarsza i najprostsza teoria.
   Zakłada, że przekrój belki jest zawsze prostopadły do osi neutralnej (obojętnej)

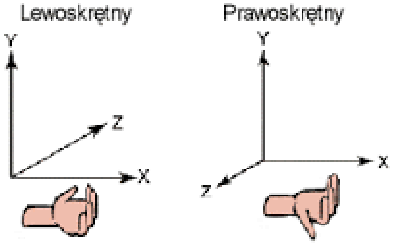
2. Wyznacza ugięcie belki **tylko** z momentu gnącego.
   Nie uwzględnia wpływu na ugięcie siły poprzecznej (odkształceń stycznych)

3. Teoria wewnętrznie sprzeczna:
   Pozwala wyznaczyć rozkład naprężeń stycznych, ale nie uwzględnia ich wpływu ani na ugięcie belki, ani na wykrzywienie przekroju.

Realnie sprawdza się dla 1/5: $a/b = 5$, $L/\max(a,b) > 10$ [1]

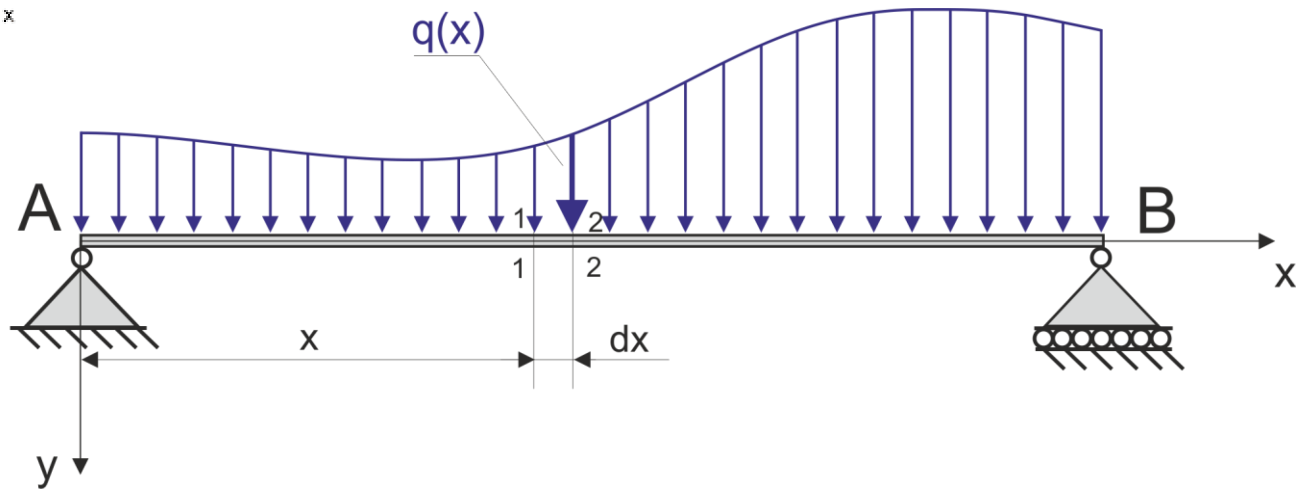
[1] Bucalem,M.L., Bathe, K-J. *The Mechanics of Solids and Structures – Hierarchical Modeling and the Finite Element Solutions*, Springer, 2011.

Podstawowe związki różniczkowe przy zginaniu



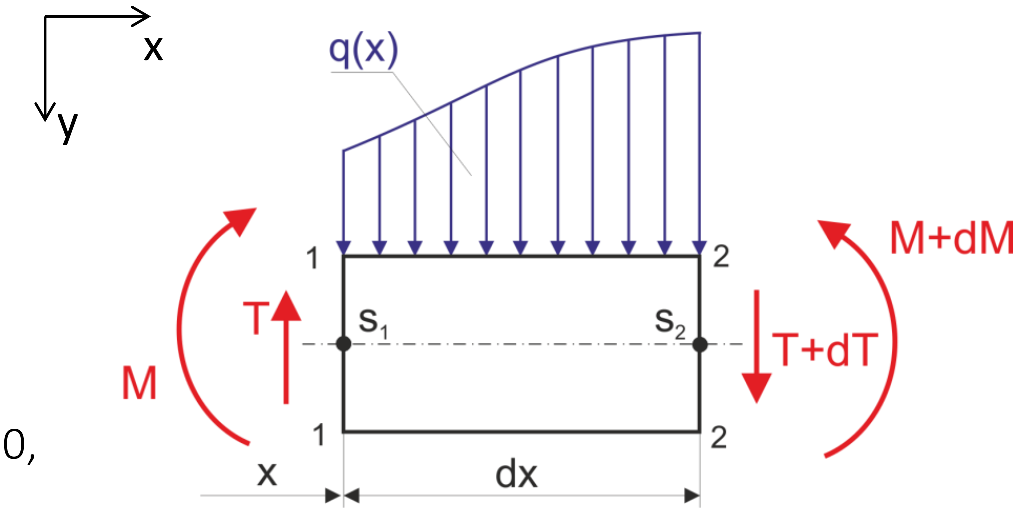
T=T(x)

M=M(x)



Podstawowe związki różniczkowe przy zginaniu pomiędzy momentem gnącym, siłą tnącą i obciążeniem ciągłym.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA



Wydzielony element dx znajduje się w statycznej równowadze, więc muszą być spełnione równania równowagi statycznej:

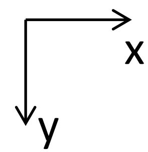
$$(1)\quad \sum F_y = 0,$$

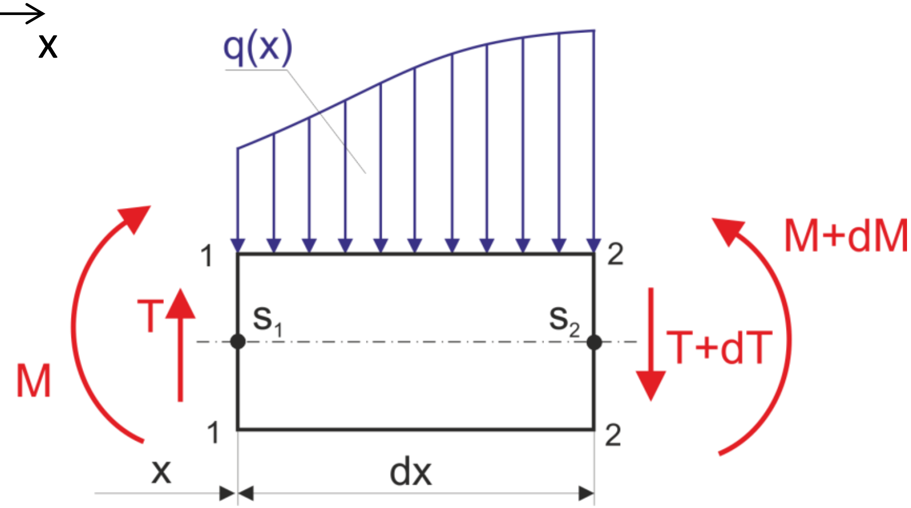
$$(2)\quad \sum M = 0,$$

$$(1): \sum F_y = 0 \rightarrow \quad T - (T + dT) - q(x)dx = 0 \longrightarrow \boxed{q(x) = -\frac{dT}{dx}}$$

Pochodna siły tnącej względem współczynnika *x* jest równa obciążeniu zewnętrznemu przyłożonemu do belki *q(x)*

POLITECHNIKA POZNAŃSKA





Wydzielony element dx znajduje się w statycznej równowadze, więc muszą być spełnione równania równowagi statycznej:

$$(1)\quad \sum F_y = 0,$$

$$(2)\quad \sum M = 0,$$

$$(2): \sum M_{s_2} = 0 \rightarrow \quad T dx + M - (M + dM) - \underbrace{q(x)dx}_{\text{siła}} \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

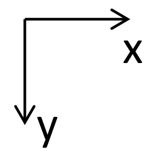
Pochodna momentu gnącego względem współrzędnej *x* jest równa sile tnącej *T*

$$T = \frac{dM}{dx} \quad \text{lub} \quad \boxed{T(x) = \frac{dM(x)}{dx}}$$

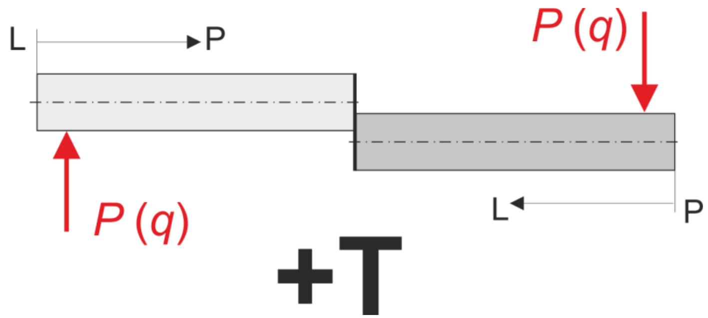
Różniczkując względem x $T = \dfrac{dM}{dx}$ otrzymujemy: $\dfrac{dT}{dx} = \dfrac{d^2M}{dx^2}$

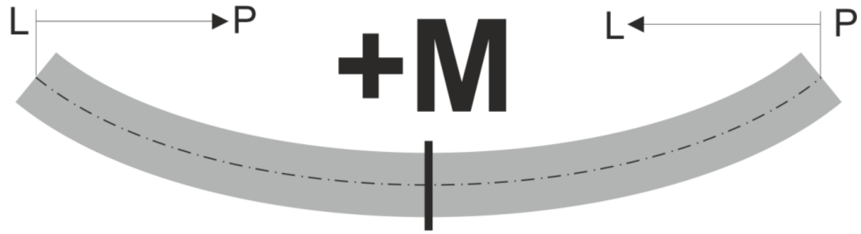
jeśli $q(x) = -\dfrac{dT}{dx}$ więc $\boxed{q(x) = -\dfrac{d^2M}{dx^2}}$

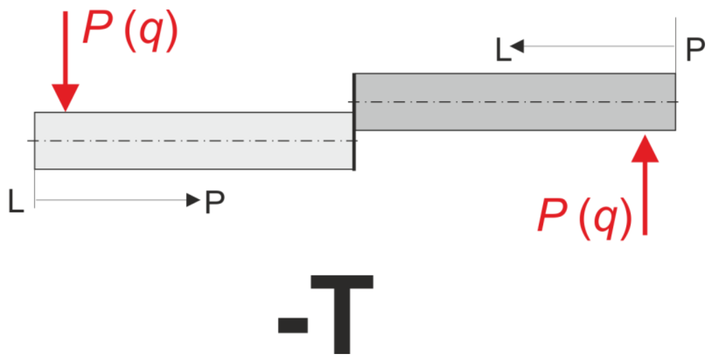
POLITECHNIKA POZNAŃSKA

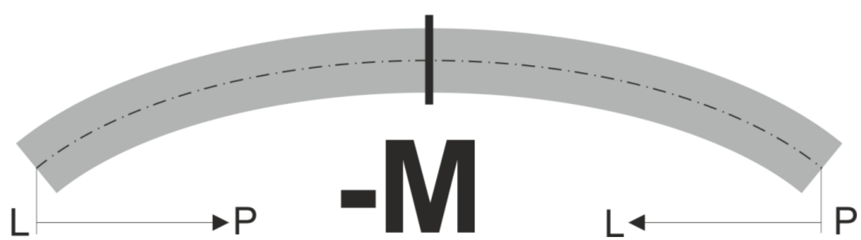


Znakowanie wewnętrznych SIŁ TNĄCYCH i MOMENTÓW GNĄCYCH





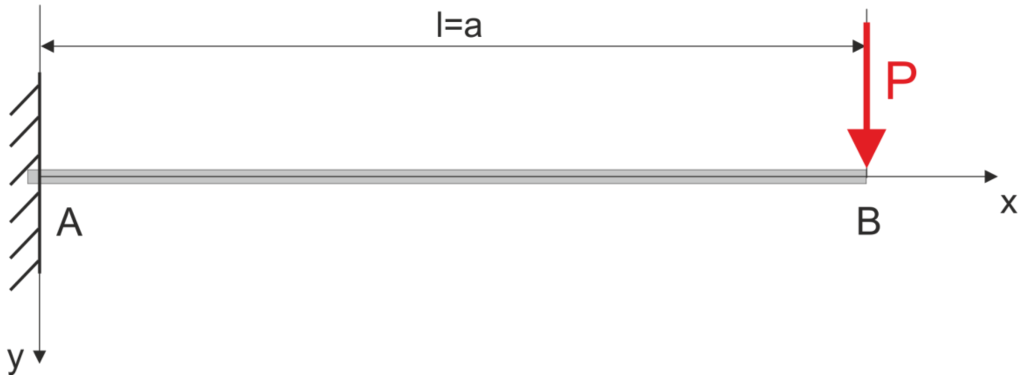




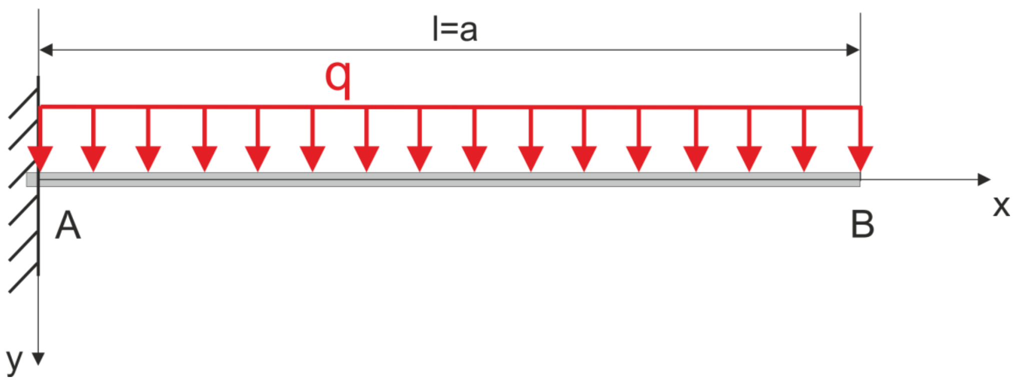
Zadanie 1

Narysować wykresy wewnętrznych sił tnących T(x) i momentów gnących M(x), oraz odczytać z wykresów maksymalne ich wartości,

a)



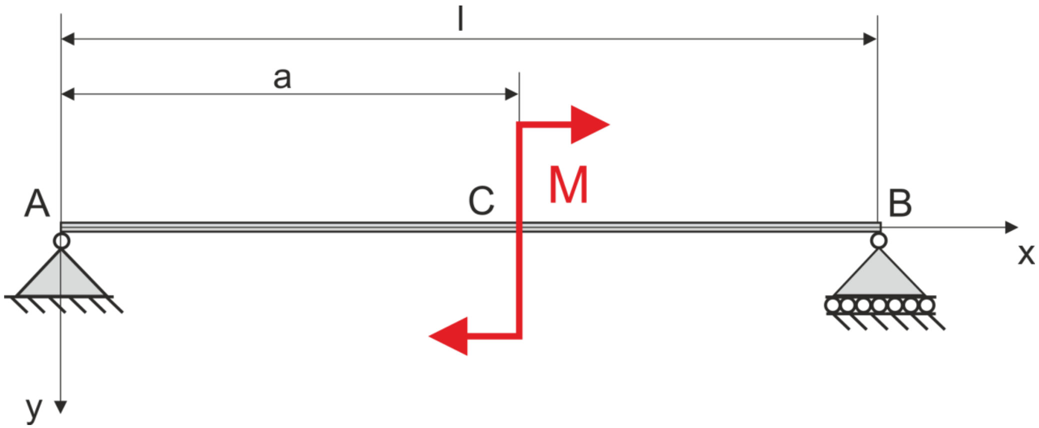
b)



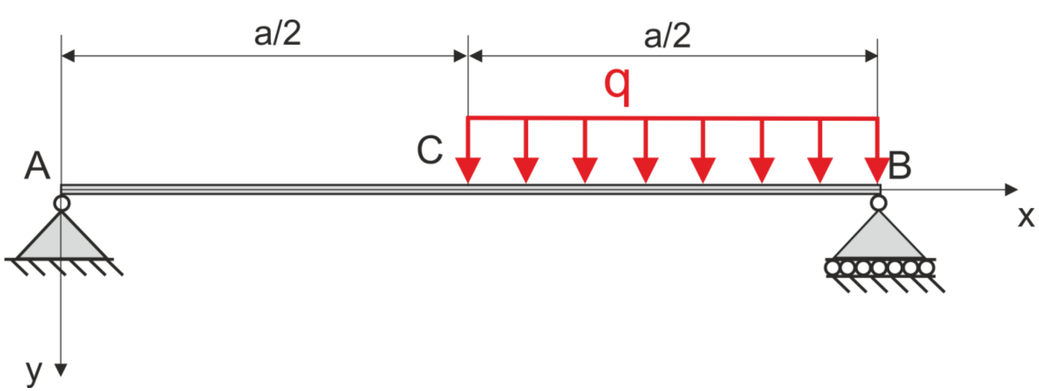
Zadanie 1

Narysować wykresy wewnętrznych sił tnących T(x) i momentów gnących M(x), oraz odczytać z wykresów maksymalne ich wartości.

c)

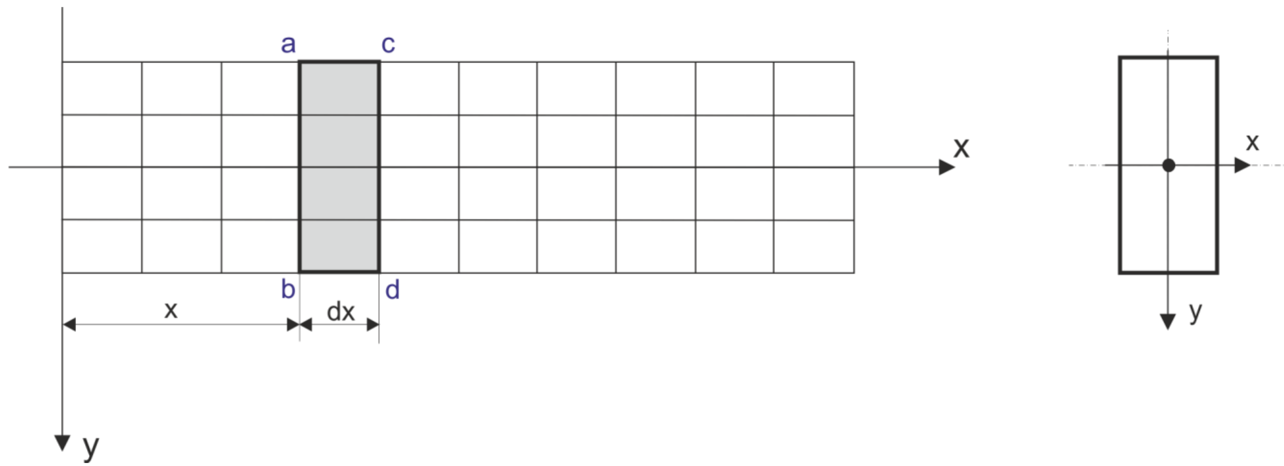


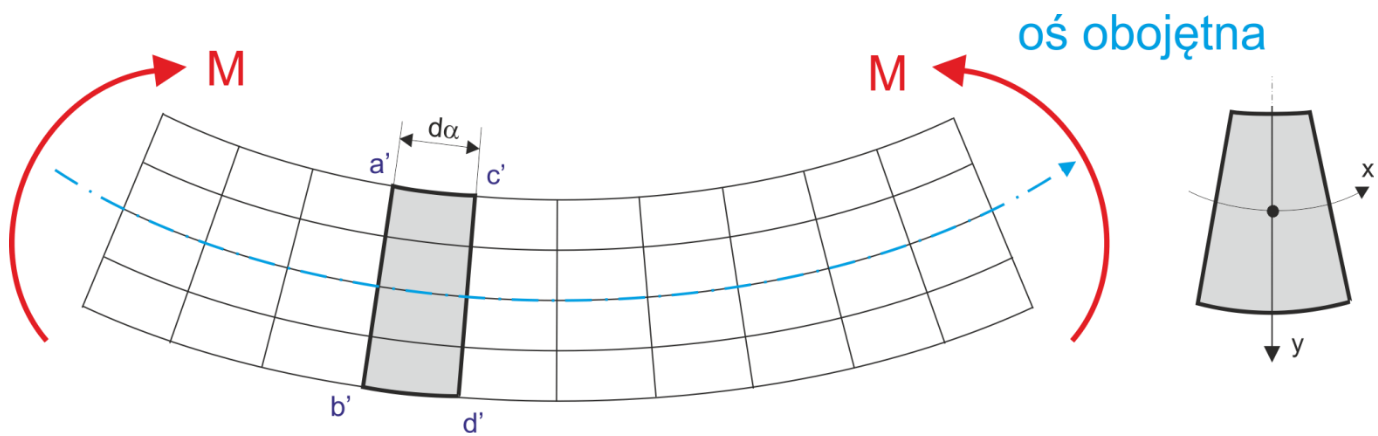
d)



Zginanie belek o stałym przekroju - TEORIA

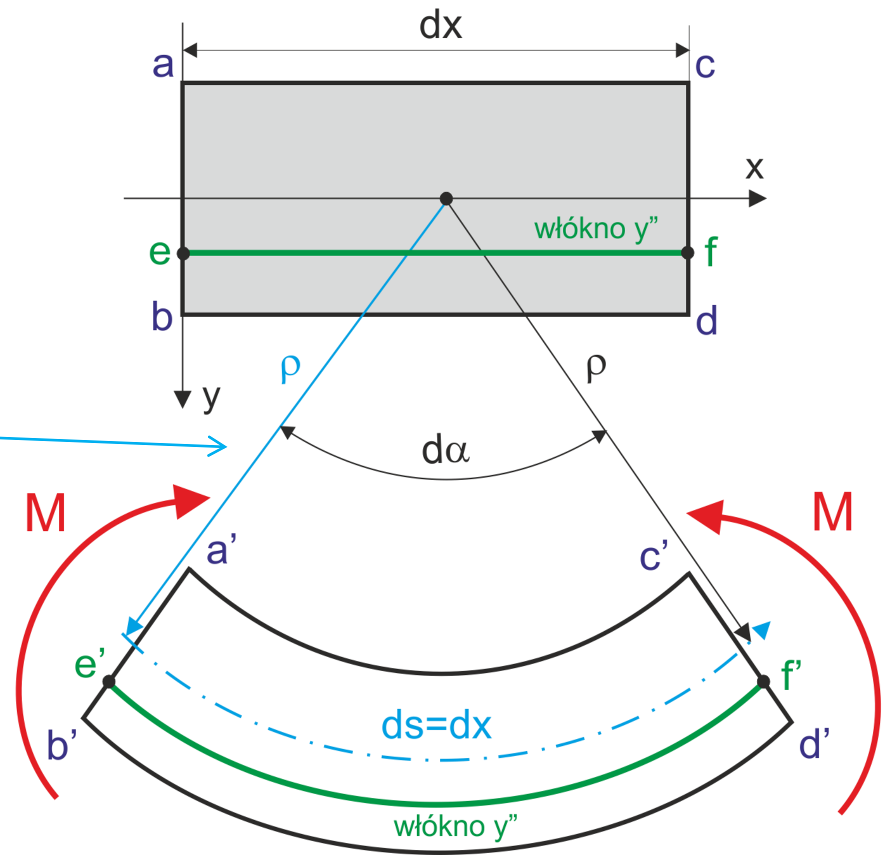
Przy zginaniu belek obowiązuje założenie płaskich przekrojów





Włókno podłużne belki w kierunku osi *x* ulegają skróceniu po stronie wklęsłej i wydłużeniu po stronie wypukłej.

ρ - promień krzywizny osi belki



Włókno leżące na osi *x* nie doznają odkształceń i tworzą tzw. **warstwę obojętną** w kierunku osi *x* i *z*.

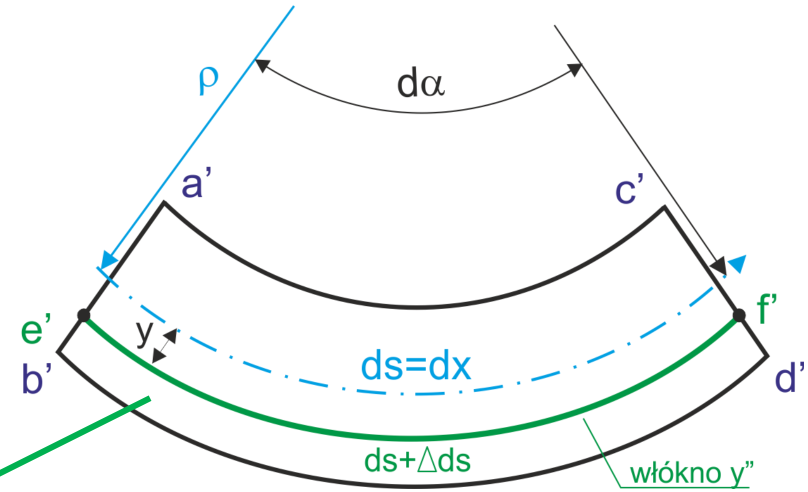
Długość włókna przed odkształceniem wynosi *dx*, a po odkształceniu *ds=dx*
Długość dowolnego podłużnego włókna belki przed odkształceniem wynosi ef=*dx* a po odkształceniu e'f'=dx+Δdx, gdzie

Δdx – jest bezwzględnym przyrostem długości włókna

Względna zmiana długości włókna: $\varepsilon = \dfrac{\Delta dx}{dx}$

$$ds = \rho \cdot d\alpha$$

$$e'f' \rightarrow \left(ds + \Delta ds\right) = \left(\rho + y\right) d\alpha$$



$$\varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{y \cdot d\alpha}{\rho \cdot d\alpha} = \frac{y}{\rho}$$

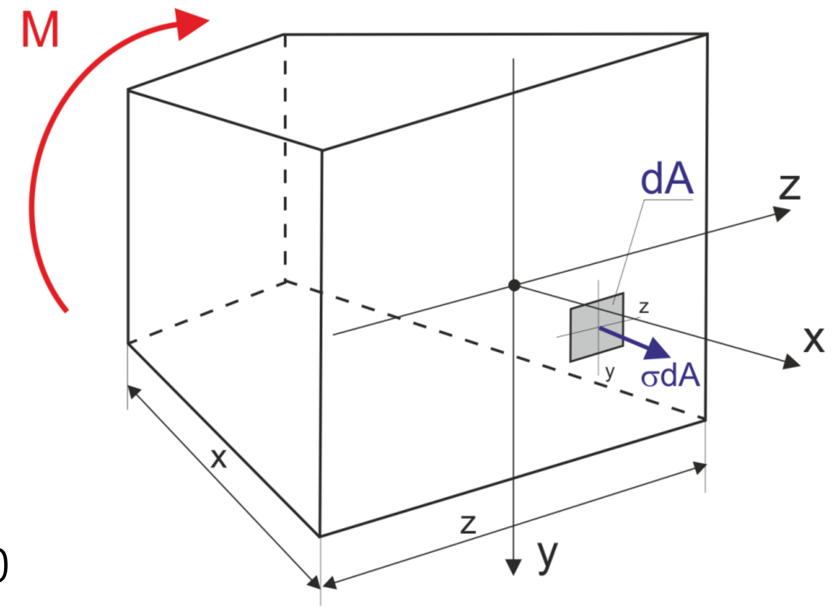
$$\boxed{\varepsilon = \frac{y}{\rho}}$$

Zakładając, że włókna nie oddziałują na siebie w kierunku osi *y* uznajemy, że w belce panuje jednoosiowy stan naprężenia dla których:

$$\sigma = \sigma_x = \varepsilon \cdot E$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Naprężenia normalne



Ponieważ promień krzywizny ρ belki jest nieznaczny, to brakujące równanie znajdujemy z analizy statycznej równowagi części belki:

$$(1):\sum F_x = 0 \rightarrow \int_A \sigma \cdot dA = 0$$

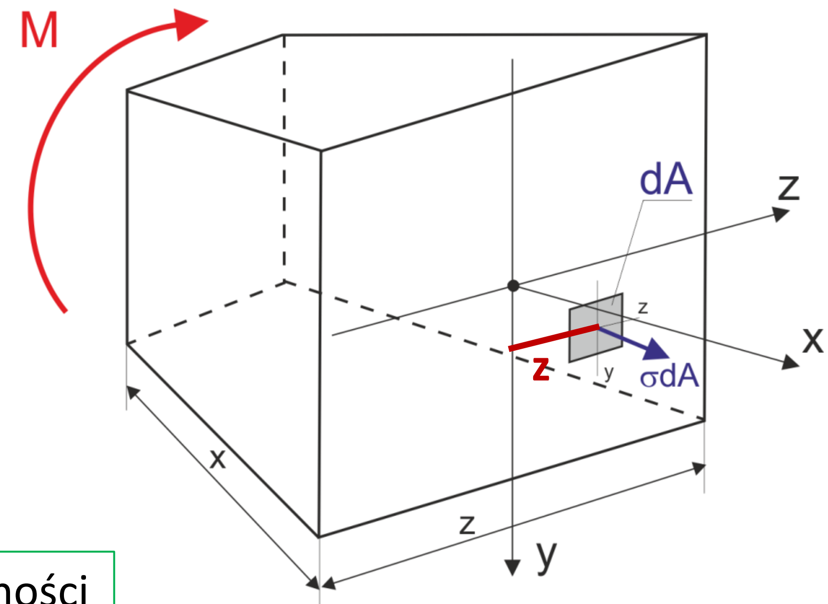
$$\int_A \frac{y}{\rho} \cdot E \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A \underbrace{y \cdot dA}_{\text{Moment statyczny}} = 0$$

Moment statyczny jest równy zero, gdy oś *z* przechodzi przez **środek ciężkości przekroju**

$$S_z = \int_A y \cdot dA \rightarrow S_z = 0$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

$$(2): \sum M_y = 0 \rightarrow \int_A \sigma \cdot dA \cdot \boxed{z} = 0$$



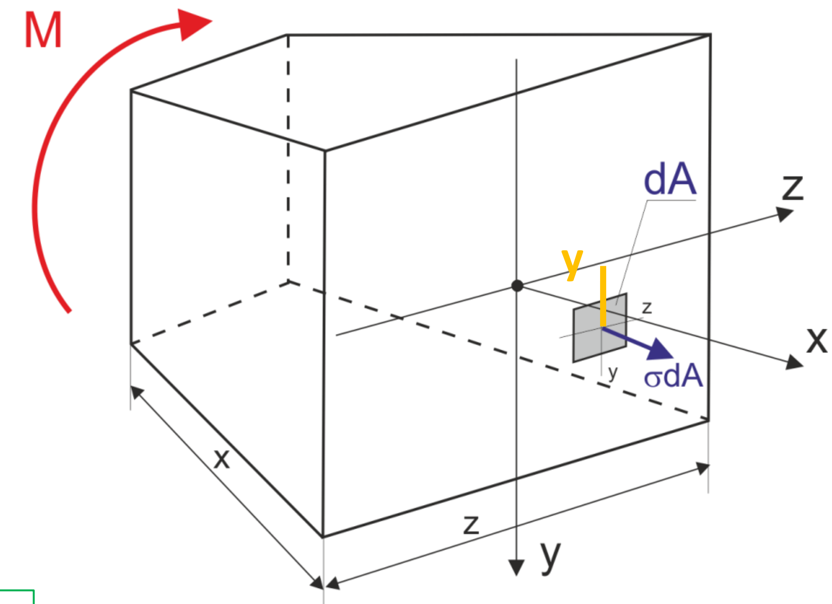
$$\frac{E}{\rho}\int_A \underbrace{y \cdot z \cdot dA}_{} = 0 \longrightarrow J_{xy} = 0$$

Dewiacyjny moment bezwładności

Jeżeli dewiacyjny moment bezwładności jest równy zero, to osie x i y muszą być głównymi centralnymi osiami przekroju (osiami bezwładności)

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

$$(3):\sum M_z = 0 \rightarrow \int_A \sigma \cdot dA \cdot \boxed{y} = M$$



$$\frac{E}{\rho}\int_A \underbrace{y \cdot y \cdot dA}_{} = M \longrightarrow J_z = \int_A y^2 dA$$

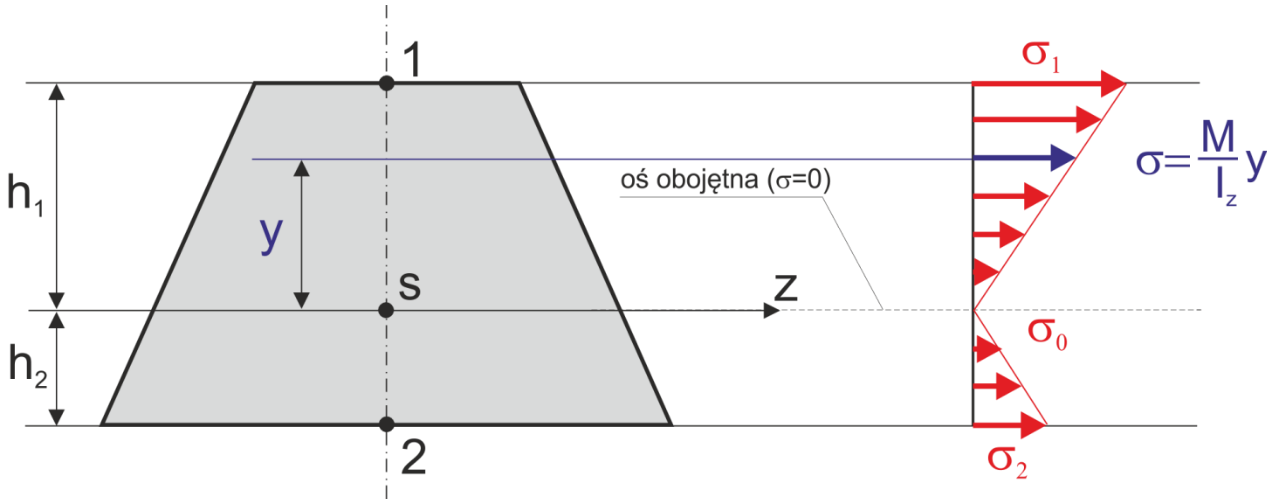
Osiowy moment bezwładności

Jeżeli dewiacyjny moment bezwładności jest równy zero, to osie *x* i *y* muszą być głównymi centralnymi osiami przekroju (osiami bezwładności)

$$\frac{E}{\rho}\cdot J_z = M \rightarrow \left(\frac{\sigma}{E \cdot y}\right)\cdot J_z \cdot E = M \longrightarrow \boxed{\sigma = \frac{M}{J_z}\cdot y}$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wskaźnik przekroju na zginanie



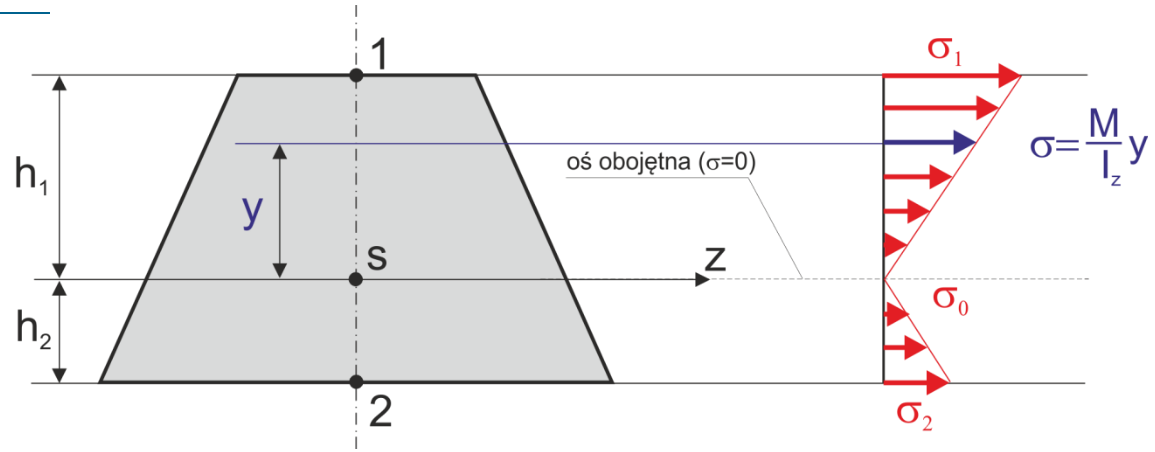
$$\sigma = \sigma_x = \frac{M}{J_z} \cdot y$$

$$y_{\min} \le y \le y_{\max} \rightarrow h_1 \le y \le h_2$$

dla y=0 $\rightarrow \sigma = 0$

dla y=h_2 $\rightarrow \sigma = \frac{M}{J_z} h_2 = \frac{M}{J_z} y_{\min}$

dla y=h_1 $\rightarrow \sigma = \frac{M}{J_z} h_1 = \frac{M}{J_z} y_{\max}$



$$W_z = \frac{J_z}{y_{max}}$$

Wskaźnik przekroju na zginanie

Wskaźnikiem wytrzymałości belki na zginanie nazywamy iloraz osiowego momentu bezwładności całego przekroju J_z względem osi obojętnej (oś obojętna z przechodzi przez środek ciężkości przekroju) i odległości y_{max} od osi obojętnej do najdalej położonego włókna przekroju.

Warunek wytrzymałości belki na zginanie

$$\boxed{\sigma_{g\max} = \frac{M_{g\max}}{W_z} \le k_g}$$

$M_{g\max}$ - maksymalny moment gnący odczytany z wykresu *M(x)*

k_g - dopuszczalne naprężenia na zginanie

Przyjmuje się, że k_g

- → k_r naprężenia na rozciąganie
- → k_c naprężenia na ściskanie

Czyste zginanie – brak siły tnącej

Zginanie pełne – jest siła tnąca

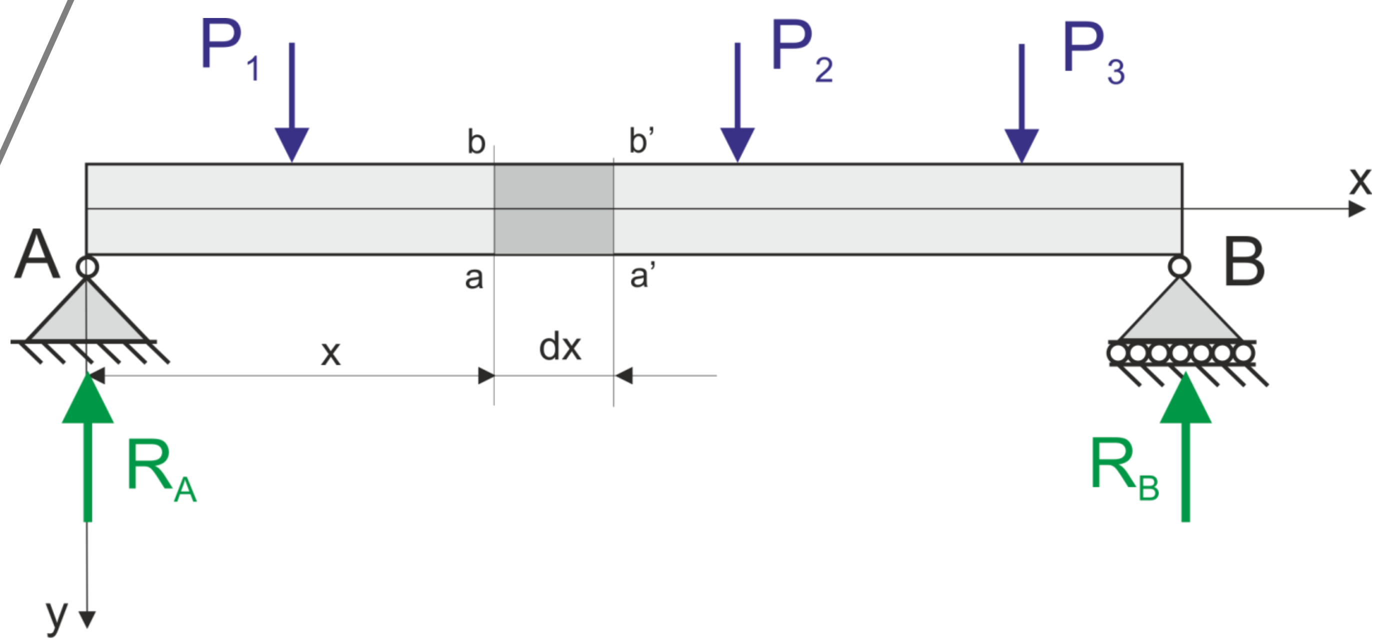
POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Naprężenia normalne i styczne (tnące)

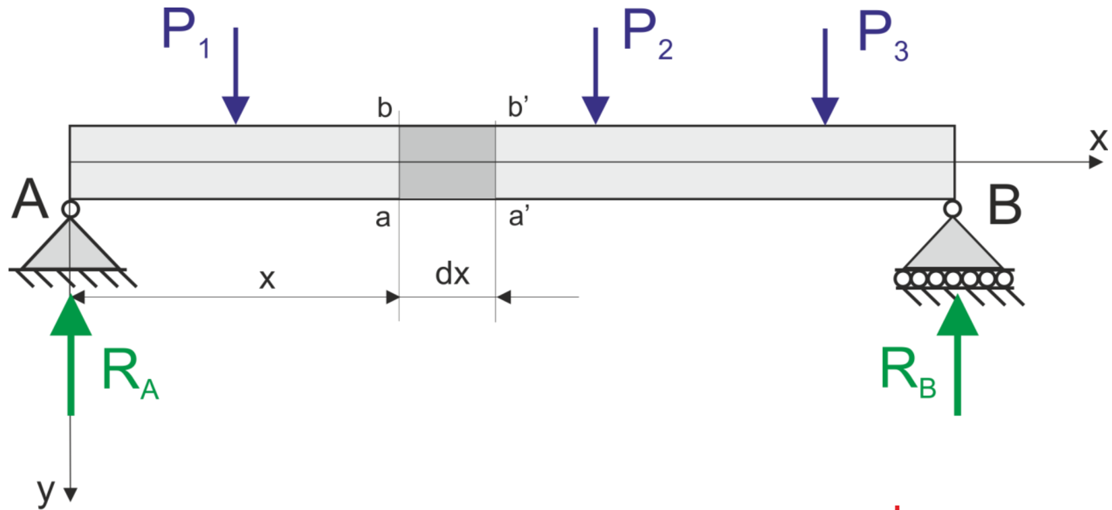
Czyste zginanie – brak siły tnącej

Zginanie pełne – jest siła tnąca

$$\sigma = \sigma_x = \frac{M}{J_z} \cdot y$$



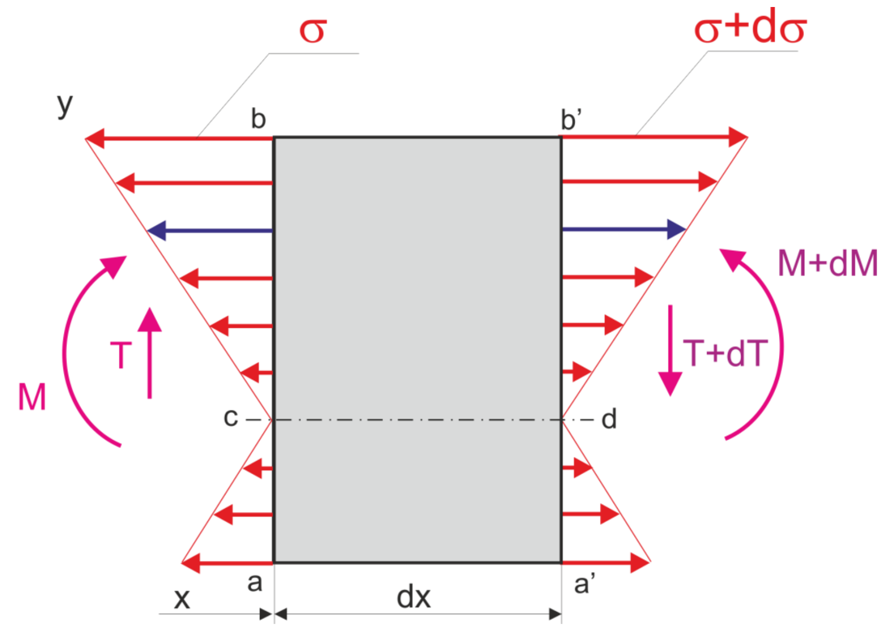
ZADANIE - Przykład



$$\boxed{\tau_{xy}}$$

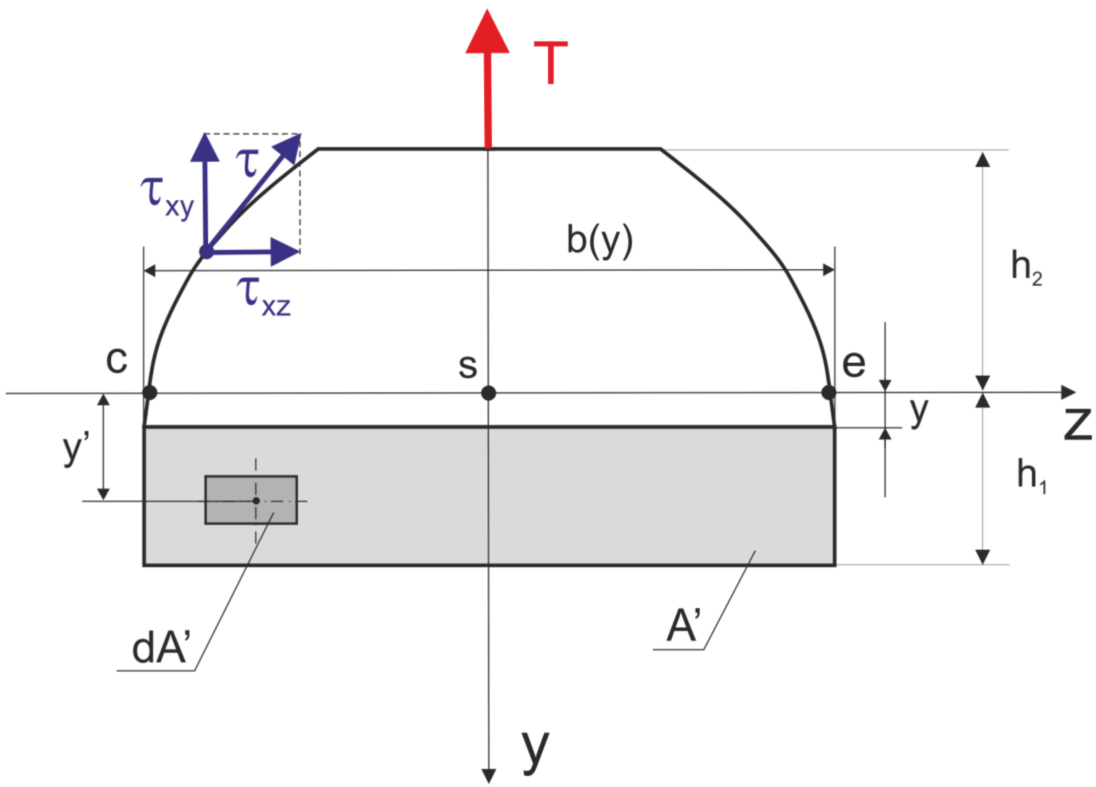
Kierunek osi wzdłuż której działa naprężenie

Płaszczyzna do której dana oś jest prostopadła



Na konturze przekroju naprężenia styczne (ścinające) mają **kierunek styczny** do przekroju

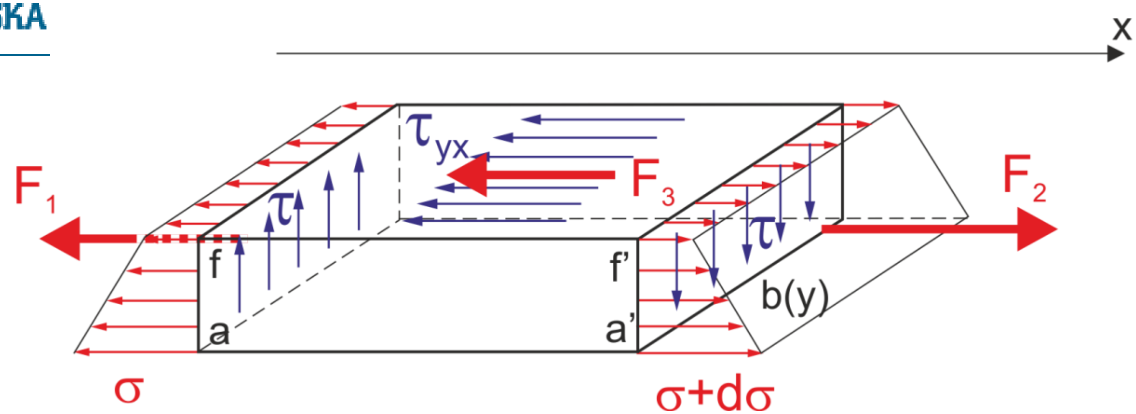
$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$$



$$\boxed{\tau_{xy}}$$

Kierunek osi wzdłuż której działa naprężenie

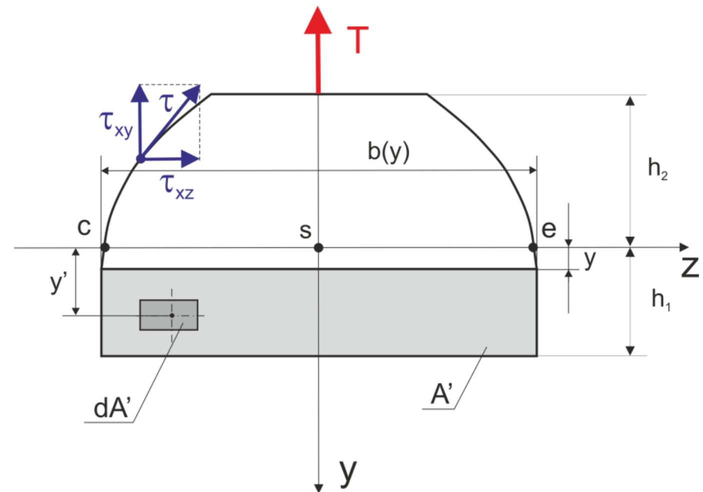
Płaszczyzna do której dana oś jest prostopadła



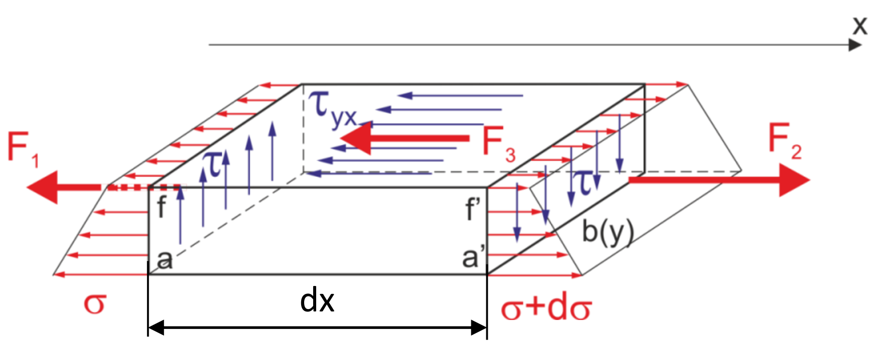
W poszczególnych warstwach podłużnych belki, równoległych do powierzchni obojętnej, występują poziome naprężenia ścinające, a w przekrojach poprzecznych występują jednocześnie poprzeczne naprężenia ścinające i w każdym punkcie belki naprężenia ścinające w tych dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach są sobie równe (wynika to z właściwości naprężeń tnących).

Na ściankę *ff'* działają tylko naprężenia styczne rozłożone wg. nieznanego prawa, a ich średnią wartość oznaczamy przez $\tau_{x,y_{\min}}$

Budujemy równania równowagi statycznej sumy momentów wszystkich sił działających na ścianki elementu *afa'f'*

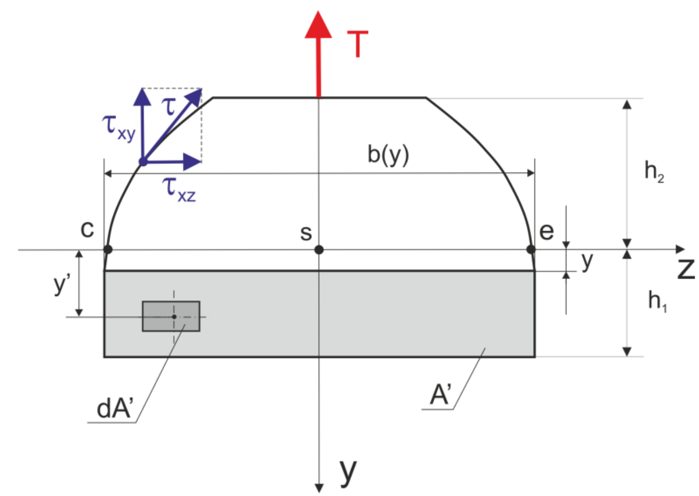


W płaszczyźnie *ff'* działa siła styczna równoległa do osi *x*, o wartości $\tau'_{yx} \cdot dx \cdot b(y)$, gdzie *b(y)* jest szerokością przekroju w odległości *y* od osi obojętnej



W dowolnym punkcie przekroju *a-f* leżącym w odległości *y'* od osi obojętnej naprężenia normalne wynoszą:

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{J_z} \cdot y'}$$



Elementarna siła działająca na element *dA'* leżący na obszarze *afa"f"* (szary) wynosi:

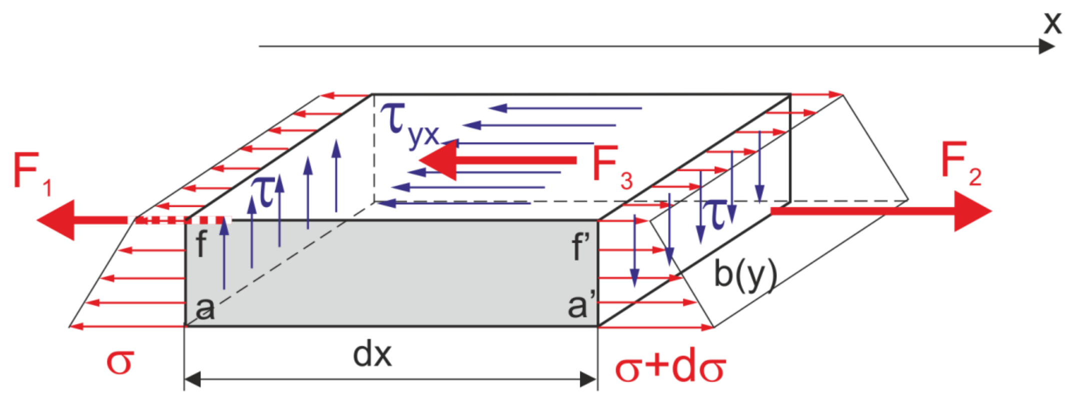
$$\sigma \cdot dA' = \frac{M}{J_z} \cdot y' \cdot dA'$$

Całkowita siła działająca na ściance ***a-f***:

$$\frac{M}{J_z} \cdot \int_{A'} y' \cdot dA'$$

Podobnie obliczamy siłę od naprężeń normalnych $\sigma + d\sigma$ w prawym przekroju ***a"f"***:

$$\frac{M + dM}{J_z} \cdot \int_{A'} y' \cdot dA'$$



Równania równowagi:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow -F_1 - F_3 + F_2 = 0$$

$$-\frac{M}{J_z}\int_{A'} y' dA' + -\tau'_{yx} \cdot b(y) \cdot dx + \frac{M+dM}{J_z} = 0$$

Po przekształceniu równania równowagi otrzymujemy:

$$\tau'_{yx} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{\int_{A'} y' dA'}{J_z \cdot b(y)}$$

$$\boxed{\tau'_{yx} = \frac{T \cdot S_z^{y-y}}{J_z \cdot b}}$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

$$\boxed{\tau'_{yx} = \frac{T \cdot S_z^{y-y}}{J_z \cdot b}}$$

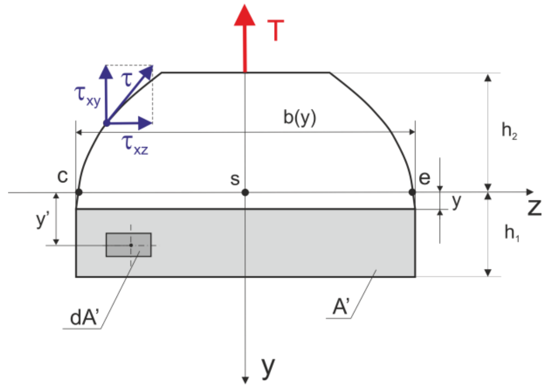
$T(x) = \dfrac{dM(x)}{dx}$ - siła tnąca (wewnętrzna) w przekroju belki (odczytana z wykresu *T(x)*)

J_z - osiowy moment bezwładności przekroju belki względem osi obojętnej

S_z^{y-y} - moment statyczny części przekroju (część zakreskowana *A'*) leżącego poza rozpatrywanym przekrojem *y-y* względem osi obojętnej

$$S_z^{y-y} = \int_{A'} y' dA'$$

$b(y)$ - szerokość przekroju na rozpatrywanym poziomie *y-y* (długość włókna ***ff'***)



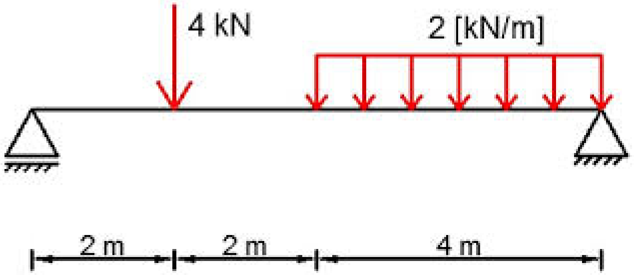
$$\boxed{\tau'_{yx} = \frac{T \cdot S_z^{y-y}}{J_z \cdot b}}$$

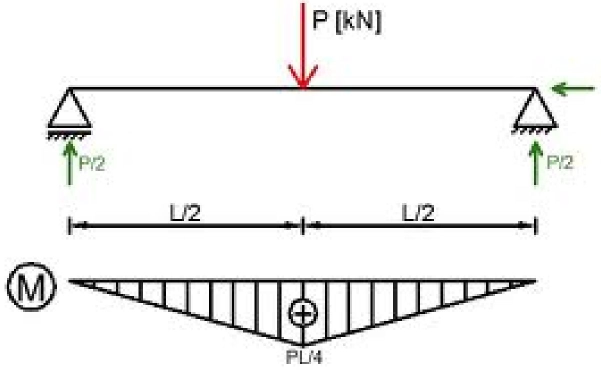
Wzór ten określa średnią wartość naprężenia tnącego, w przekrojach belki równoległych do warstwy obojętnej, które oznaczamy: $\tau_{yx} = \tau_{xy}$

Na podstawie prawa równości naprężeń stycznych w dwóch wzajemnie prostopadłych przekrojach możemy napisać:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau$$

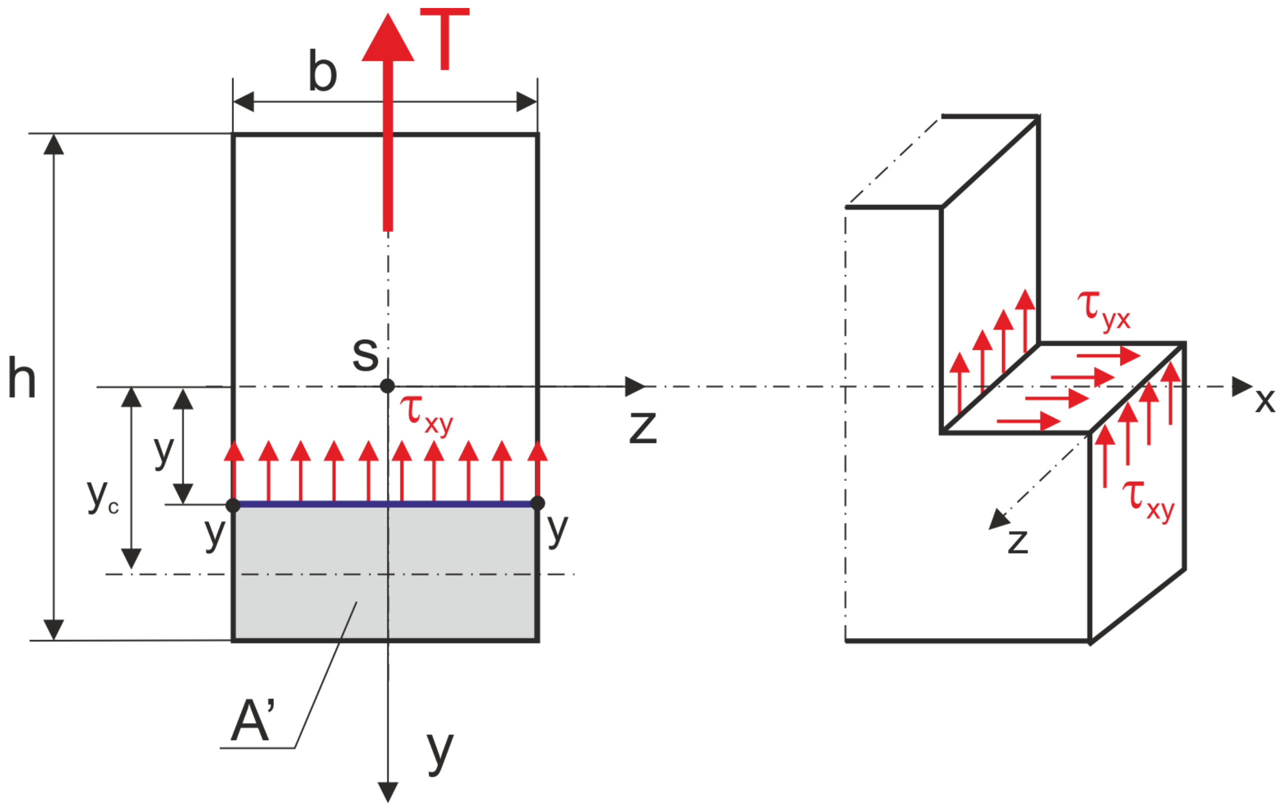
$$\boxed{\tau = \frac{T \cdot S_z^{y-y}}{J_z \cdot b}}$$



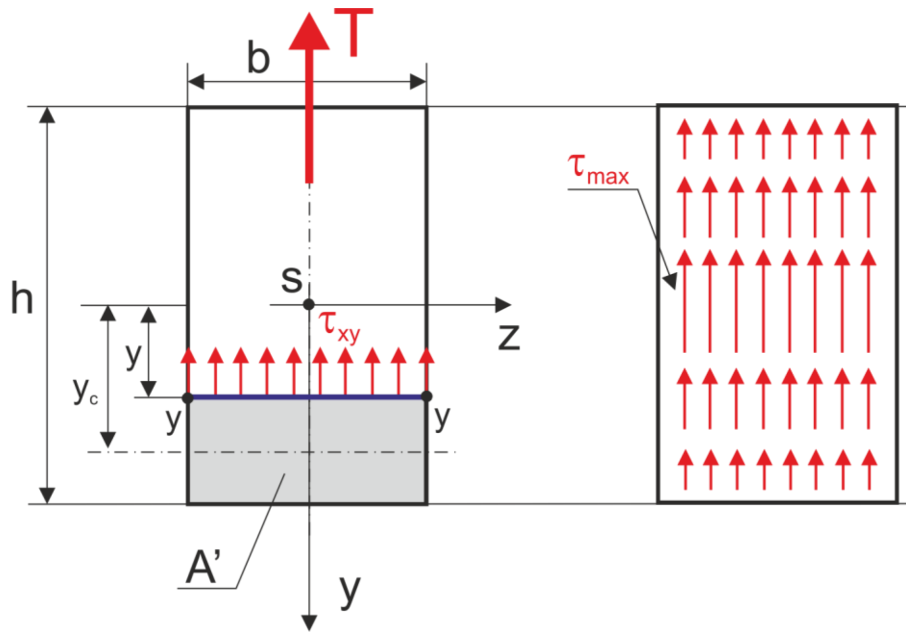


Rozkład naprężeń **normalnych i stycznych** w różnych przekrojach poprzecznych.

Przekrój PROSTOKĄTNY



Przekrój PROSTOKĄTNY



$$S_z = \int_{A'} y' \cdot dA' \rightarrow ?$$

dla prostokąta: $J_z = \dfrac{b \cdot h^3}{12}$

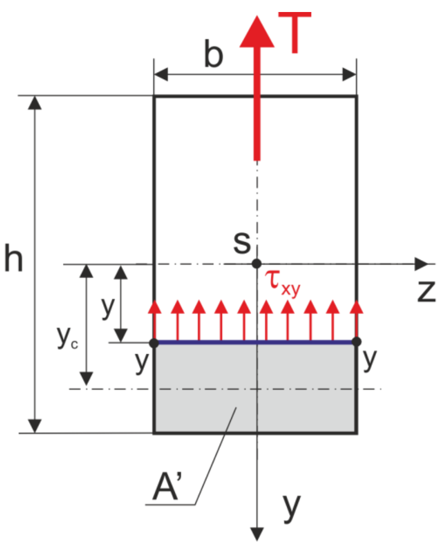
b(y)=b

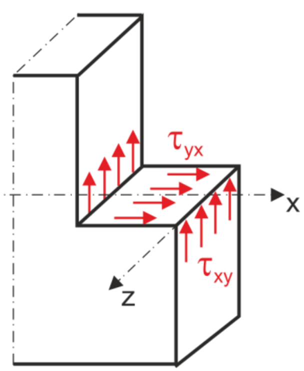
T – constans,

$$\boxed{S_z = \int_{A'} y' \cdot dA' \rightarrow ?}$$

$$S_z^{y-y} = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot y_c = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left[y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2} \right] =$$

$$= b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left[\frac{h}{4} + \frac{y}{2}\right] = \frac{1}{2} b \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$





dla $y = 0 \rightarrow S_z^{y-y}\Big|_{y=0} = \dfrac{b \cdot h^2}{8}$

dla $y = \dfrac{h}{2} \rightarrow S_z^{y-y}\Big|_{y=\frac{h}{2}} = 0$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

$$\text{dla } y=0 \rightarrow S_z^{y-y}\Big|_{y=0} = \frac{b\cdot h^2}{8}$$

$$\text{dla } y=\frac{h}{2} \rightarrow S_z^{y-y}\Big|_{y=\frac{h}{2}} = 0$$

Stąd wynika, że naprężenia ścinające w warstwie leżącej wzdłuż osi obojętnej *z* są największe, a w warstwie najdalej położonej od osi obojętnej (skrajnej) naprężenia ścinające są równe zero.

$$\tau = \frac{T}{\frac{b\cdot h^3}{12}\cdot b}\cdot\left[\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\right]$$

Parabola, krzywa 2 stopnia

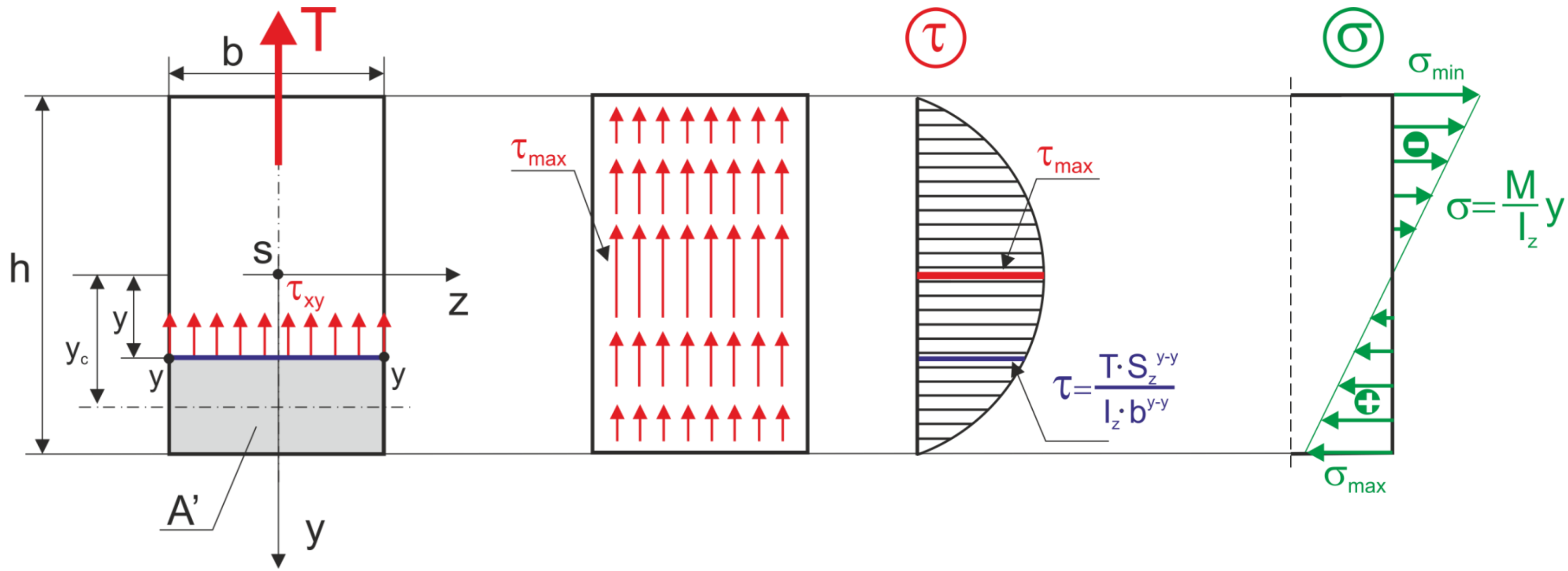
Wzór Żurawskiego

$$\tau = \frac{T(x)\cdot S_z^{y-y}}{J_z\cdot b(y)}$$

$$\text{dla } y=0 \rightarrow \tau=\tau_{max} = \frac{3}{2}\cdot\frac{T}{b\cdot h} = \frac{3}{2}\cdot\frac{T}{A}$$

$$\text{dla } y=\pm\frac{h}{2} \rightarrow \tau=0$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA



ZADANIE 1 → Wykresy naprężeń normalnych i tnących dla różnych przekrojów

ZADANIE 2 → Wartość naprężenia w dowolnym punkcie przekroju

Belki o równomiernej wytrzymałości na zginanie

Projektowanie belek zginanych odbywa się przeważnie na podstawie warunku nieprzekraczalności naprężeń dopuszczalnych przez naprężenia normalne (rzeczywiste – pojawiające się w zginanej belce):

$$\sigma_{\max} = \sigma_g = \frac{M_{g\max}}{W_z} \le \sigma_{dop}$$

Zakłada się często, że belka ma stały przekrój poprzeczny.

Można z tej zależności wyznaczyć wskaźnik wytrzymałości na zginanie:

$$W_z = \frac{M_{g\max}}{\sigma_{dop}}$$

Wyznaczony wskaźnik wytrzymałości odpowiada przekrojowi, w którym występuje maksymalny moment gnący. We wszystkich innych przekrojach belki, gdzie moment gnący jest mniejszy od momentu maksymalnego, naprężenia gnące są mniejsze od naprężeń maksymalnych i materiał belki nie będzie należycie wykorzystany.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

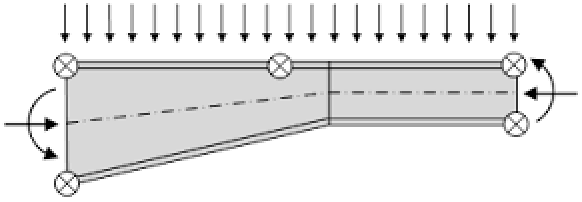
W związku z powyższym należy zaprojektować belkę o zmiennym przekroju i dobierać wskaźnik wytrzymałości w taki sposób, aby naprężenia w skrajnych włóknach równały się stałej wartości równej $\sigma = \sigma_{g\max}$

Najlepiej jest stosować zmienny wskaźnik wytrzymałości $W_z = W_z(x)$ i to w taki sposób, aby był spełniony warunek:

Stąd wyznaczamy $W_z(x) = \dfrac{1}{\sigma} M_g(x)$

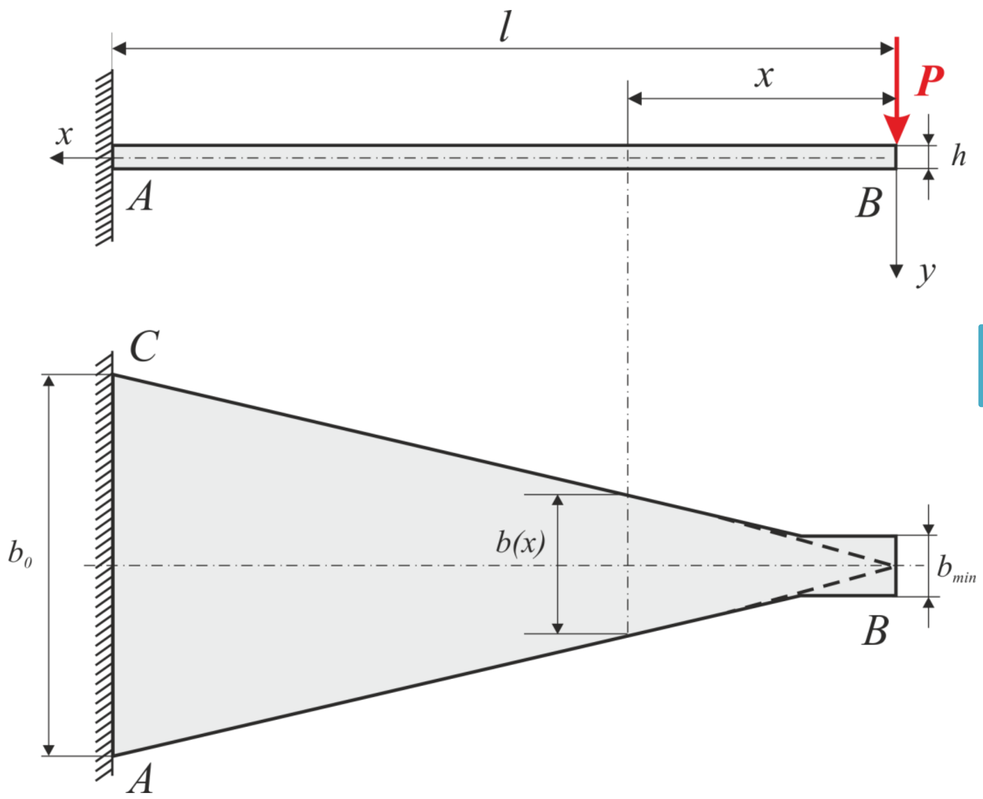
Tak zaprojektowaną belkę nazywa się belką o równomiernej wytrzymałości na zginanie, przy czym przyjmujemy

$$\boxed{\sigma = \sigma_{dop}}$$



Centrum Onkologii w Bydgoszczy
2017 rok

Belka wspornikowa o przekroju prostokątnym obciążona na swobodnym końcu siłą skupioną



Aby uzyskać zmienny wskaźnik, można:

1. Zmienić wysokość *h*
2. Zmienić szerokość *b*

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Aby uzyskać zmienny wskaźnik, można:

1. Zmienić wysokość *h*
2. Zmienić szerokość *b*

Załóżmy, że wysokość przekroju *h*=const. - jest stała, a zmienia się jego szerokość *b=b(x)*

$$M(x) = P \cdot x$$

$$W_z(x) = \frac{J_z(x)}{y_{\max}} = \frac{2 \cdot J(x)}{h} = \frac{b(x) \cdot h^2}{6}$$

W miejscu utwierdzenia mamy:

$$M_{g\max} = P \cdot l$$

$$W_{z0} = \frac{b_0 \cdot h^2}{6}$$

Funkcja określająca kształt belki o równomiernej wytrzymałości ma więc postać:

$$\frac{M_{g\max}}{W_0} = \frac{M(x)}{W_z(x)} = \sigma_{dop} = const.$$

Funkcja określająca kształt belki o równomiernej wytrzymałości ma więc postać:

$$\frac{M_{g\max}}{W_0} = \frac{M(x)}{W_z(x)} = \sigma_{dop} = const.$$

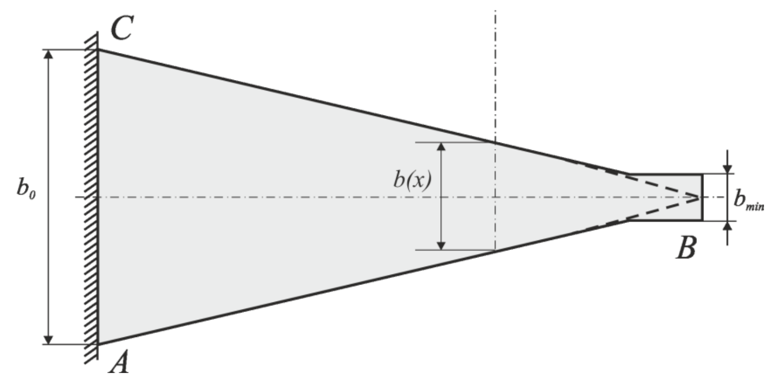
Stąd wyznaczamy:

$$\frac{6Pl}{b_0 h^2} = \frac{6Px}{b(x)h^2} \quad \text{więc} \quad b(x) = b_0 \frac{x}{l}$$

Jak widać **szerokość** przekroju zmienia się liniowo, RYSUNEK PONIŻEJ

Gdyby nie brać pod uwagę naprężeń ścinających, wówczas teoretycznie przekrój końcowy (dla *x*=0) mógłby być bliski zeru. Najczęściej w tym przekroju występuje siłą tnąca *T*=*P* wywołująca naprężenia ścinające τ.

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{hb_{\min}} \leq \tau_{dop}}$$



skąd wyznaczamy

$$\boxed{b_{\min} = \frac{3P}{2h \cdot \tau_{dop}}}$$

Przekrój końcowy nie może być więc „zaostrzony” lecz będzie prostokątny o szerokości równej $b_{\min}$

Aby uzyskać zmienny wskaźnik, można:

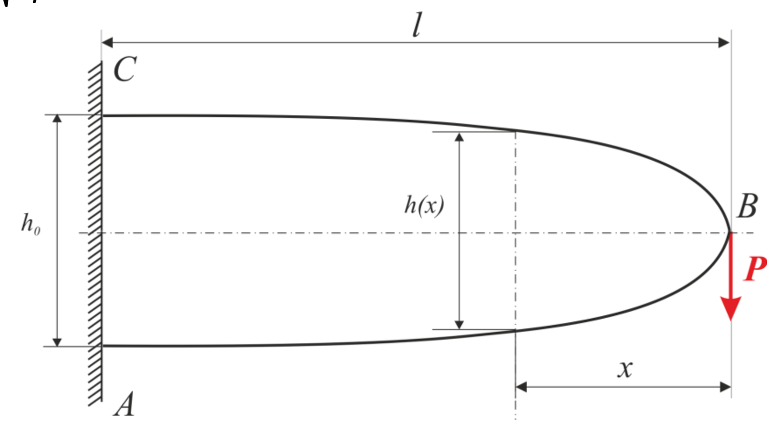
1. Zmienić wysokość *h*
2. Zmienić szerokość *b*

Załóżmy, że szerokość przekroju *b=const.* - jest stała, a zmienia się jego wysokość *h=h(x)*

$$\frac{M_{g\max}}{W_{z0}} = \frac{M(x)}{W_z(x)} = const.$$

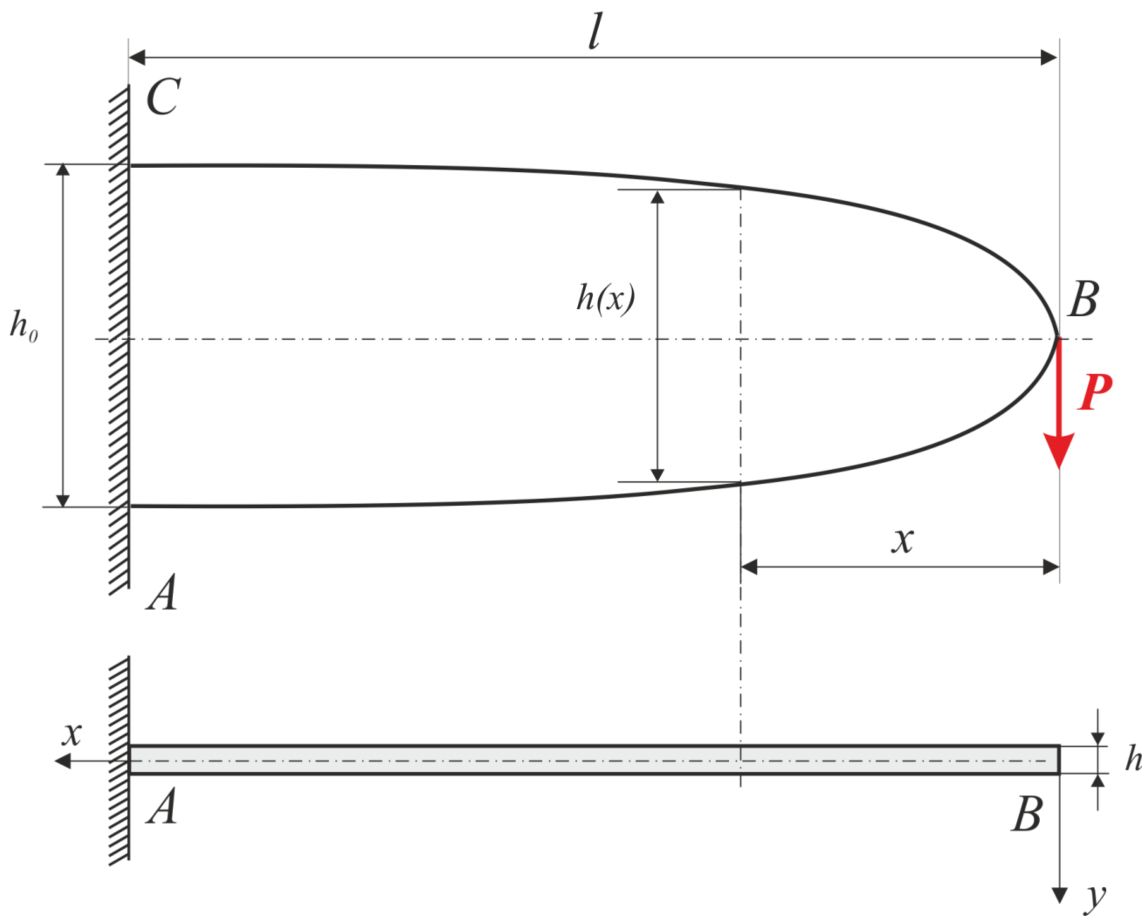
Stąd wyznaczamy:

$$\frac{6Pl}{bh_0^2} = \frac{6Px}{bh^2(x)} = const. \quad \text{więc} \quad h(x) = h_0\sqrt{\frac{x}{l}}$$

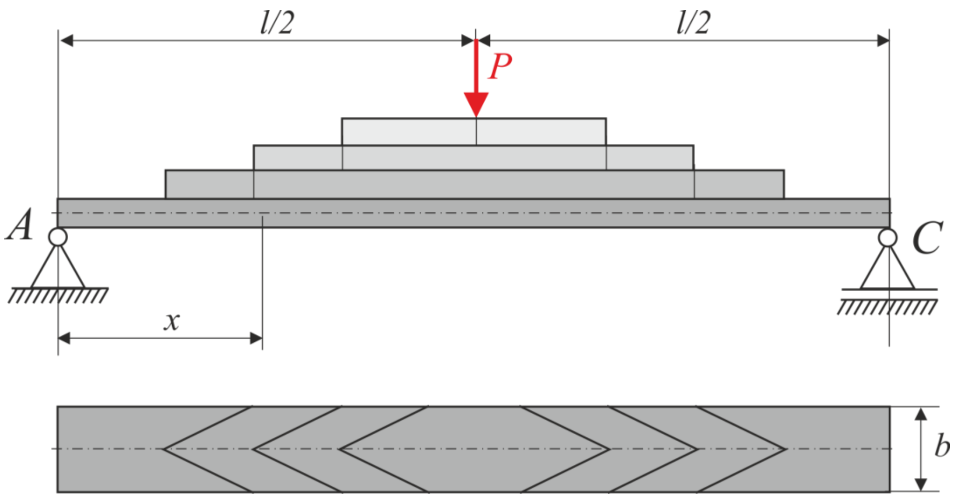


Funkcja ta odpowiada paraboli o wierzchołku leżącym w miejscu przyłożenia siły skupionej.

Jak widać wysokość przekroju zmienia się parabolicznie, RYSUNEK PONIŻEJ



Belka swobodnie podparta obciążona w środku siłą skupioną



$$M(x)=\frac{1}{2}P\cdot x$$

$$W_z(x)=\frac{J_z(x)}{y_{\max}}=\frac{2\cdot J(x)}{h}=\frac{b(x)\cdot h^2}{6}$$

$$W_z=\frac{M(x)}{\sigma_{dop}}$$

stąd

$$\boxed{b(x)=\frac{3Px}{h^2\sigma_{dop}}}$$

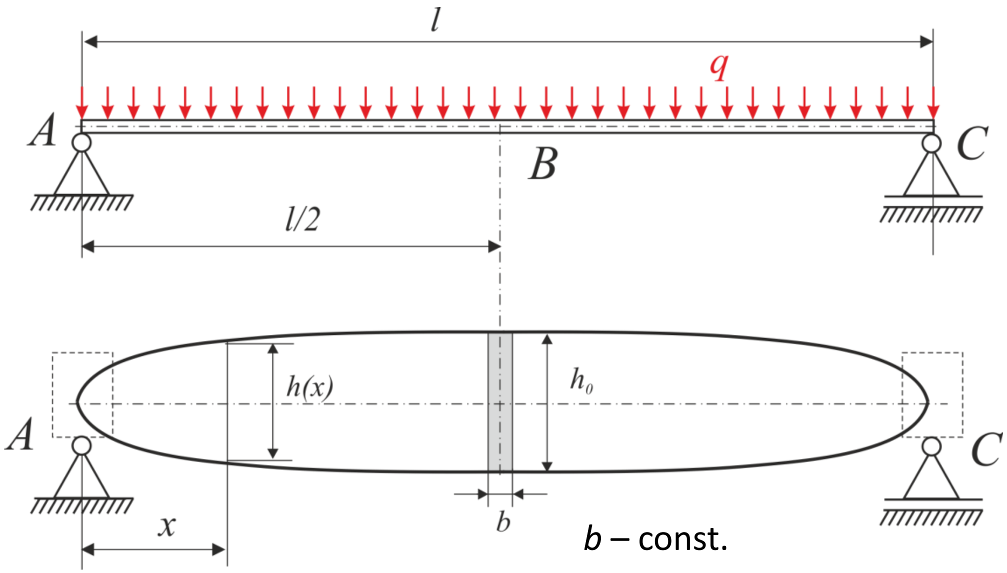
Maksymalny moment gnący pojawia się w środku długości, szerokość przekroju $b_{\max}=\frac{3Pl}{2h^2\sigma_{dop}}$

Więc otrzymujemy:

$$\boxed{b(x)=b_{\max}\frac{x}{l}}$$

Liniowo (x) – np. RESORY

$$M(x)=\frac{1}{2}ql\cdot x-\frac{1}{2}qx^2 \qquad W_0=\frac{M(x)}{\sigma_{dop}}$$



$$W_0(x)=\frac{b\cdot h^2(x)}{6}$$

$$M_{g\max}=\frac{1}{8}ql^2 \qquad W_0=\frac{b\cdot h_o^2}{6}$$

h_0 – wysokość belki w przekroju środkowym

b – const.

$$\boxed{\frac{M_{g\max}}{W_0}=\frac{M(x)}{W_0(x)}=const.}$$

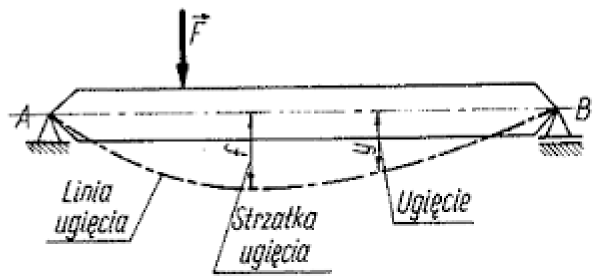
Funkcja zmiany wysokości przekroju:

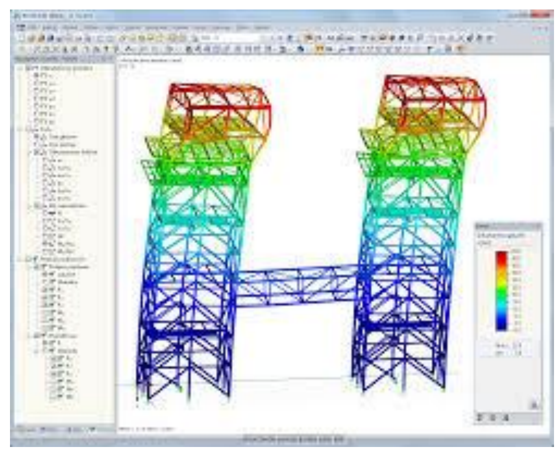
$$\frac{6ql^2}{8bh_0^2}=\frac{6}{b\cdot h^2(x)}\left(\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2\right)$$

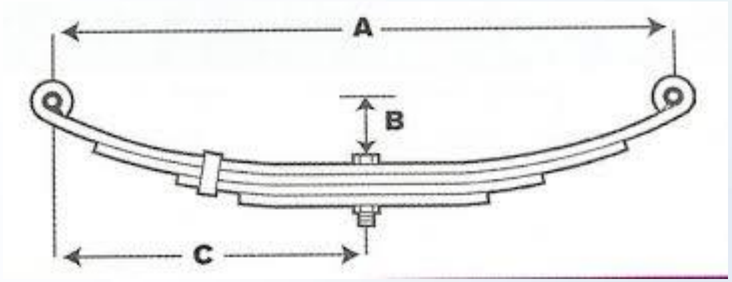
$$\boxed{h(x)=2\frac{h_0}{l}\sqrt{x(l-x)}}$$

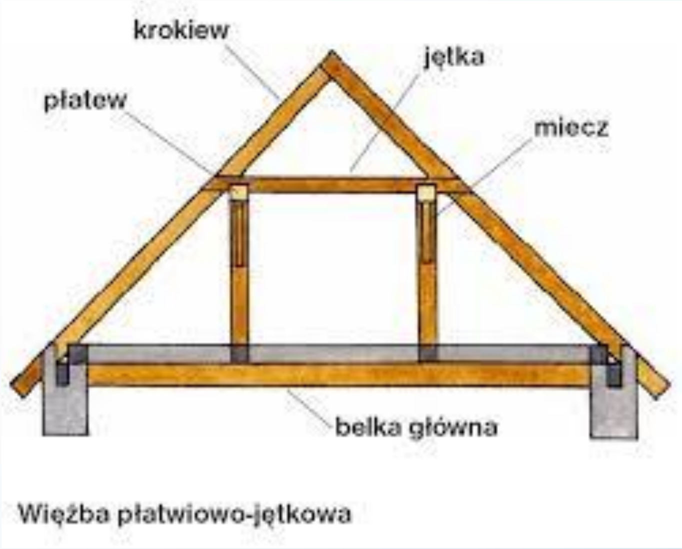
Przekrój podłużny belki jest elipsą o osiach l i h_0.
(kształty przybliżone walcowe i stożkowe)

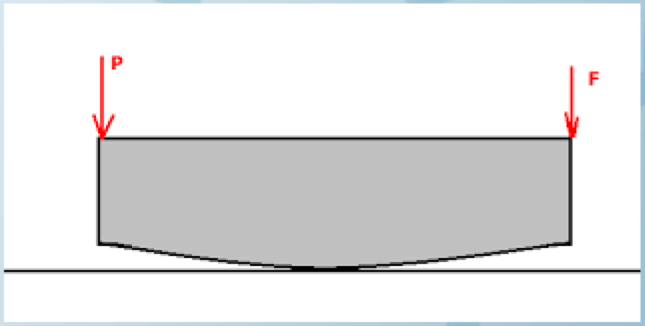
DEFORMACJA SPRĘŻYSTA BELEK






A
B
C


krokiew
jętka
płatew
miecz
belka główna
Więźba płatwiowo-jętkowa


P
F

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

Zapraszam ponownie ☺