



POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wykład NR2 v. 6.0

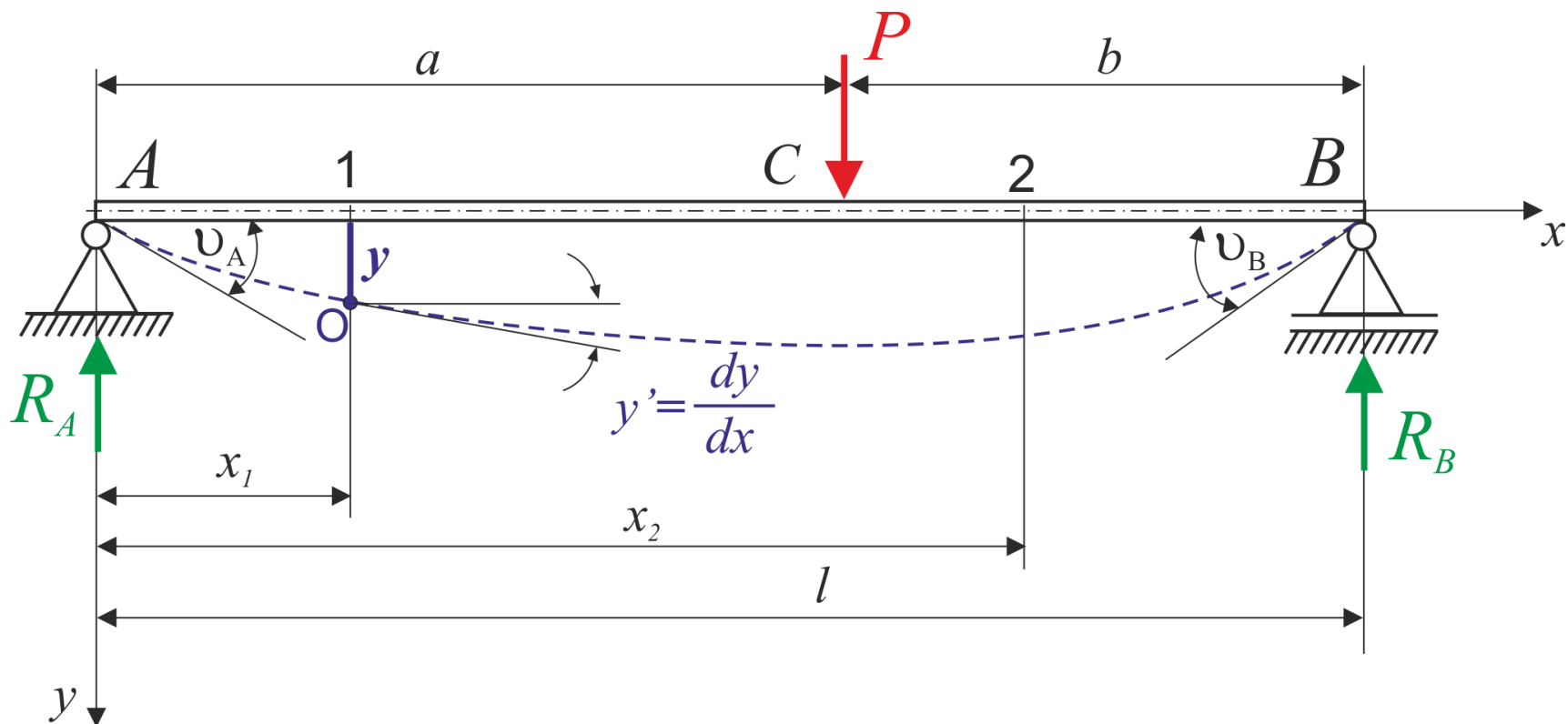
DEFORMACJA W BELKACH ZGINANYCH

Równanie Różniczkowe Linii Ugięcia Belki

dr hab. inż. Piotr PACZOS

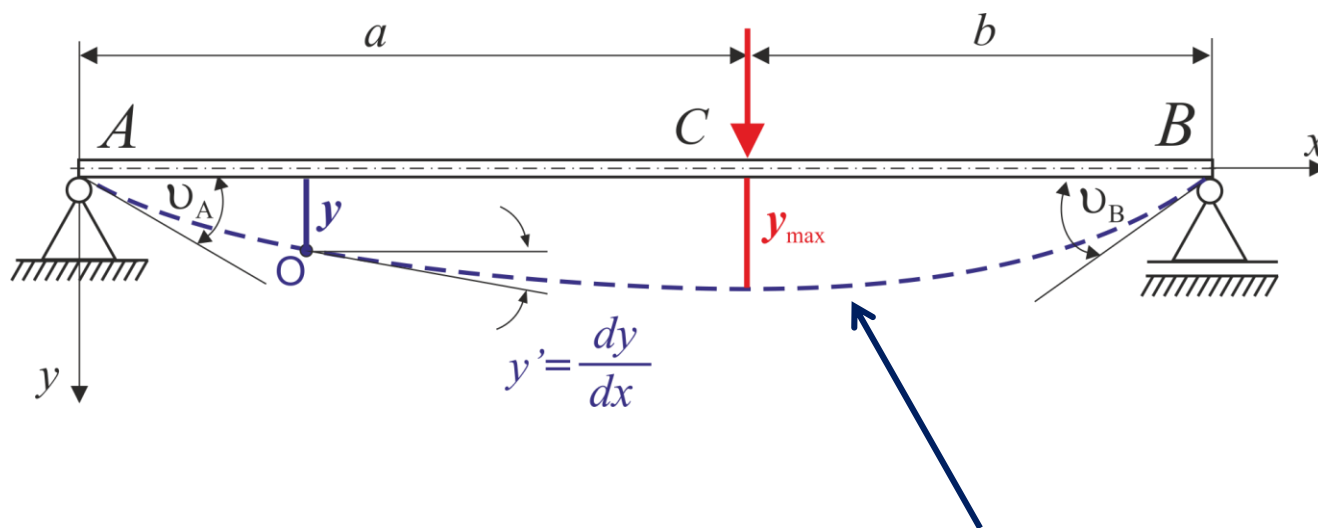
**Politechnika Poznańska,
Instytut Mechaniki Stosowanej,
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji**

DEFORMACJA W BELKACH ZGINANYCH



Równanie Różniczkowe Linii Ugięcia Belki

Deformację belek wywołane różnego rodzaju obciążeniami zewnętrznymi wyznacza się przez całkowanie pewnej formy różniczkowej, wyrażającej lokalne deformacje nieskończenie małego elementu belki

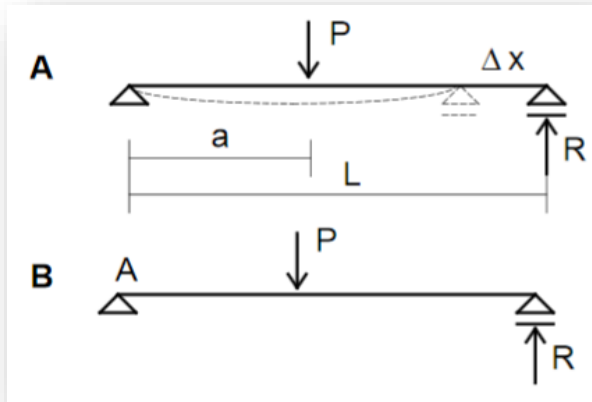


Początkowo prosta oś podłużna belki zostaje zdeformowana i przyjmuje postać zakrzywioną, zwaną linią ugięcia belki.

Zasada małych przemieszczeń

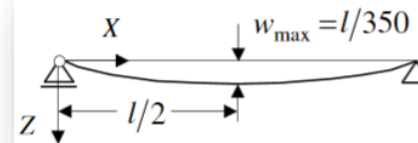
Założenie o małych przemieszczeniach :

zasada zeszywnienia przemieszczenia punktów konstrukcji są małe w porównaniu z jej charakterystycznymi wymiarami (np. mniejsze od 1/250 długości belki, 1/4 grubości płyty itp.).



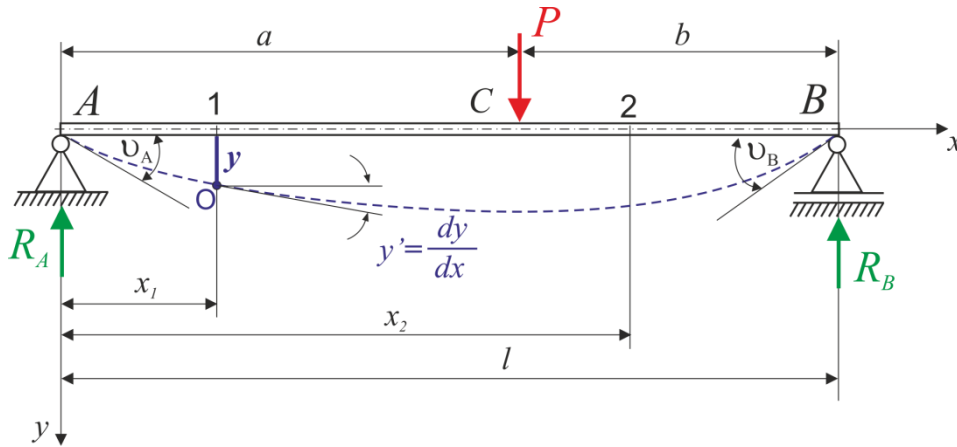
Zasada zeszywnienia : wpływ przemieszczeń konstrukcji na wartość sił biernych (reakcji podpór) i sił wewnętrznych (przekrojowych) jest pomijalnie mały. Oznacza to, że przy obliczaniu tych sił nie rozróżniamy konfiguracji aktualnej od wyjściowej.

PN-90/B-03200



$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{l/350}{l/2} = 0.0057$$

Wartość ugięcia wyznacza się w celu skontrolowania, czy nie przekraczają wartości dopuszczalnych.

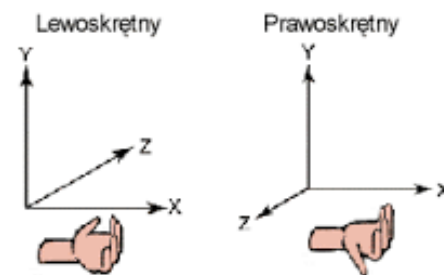
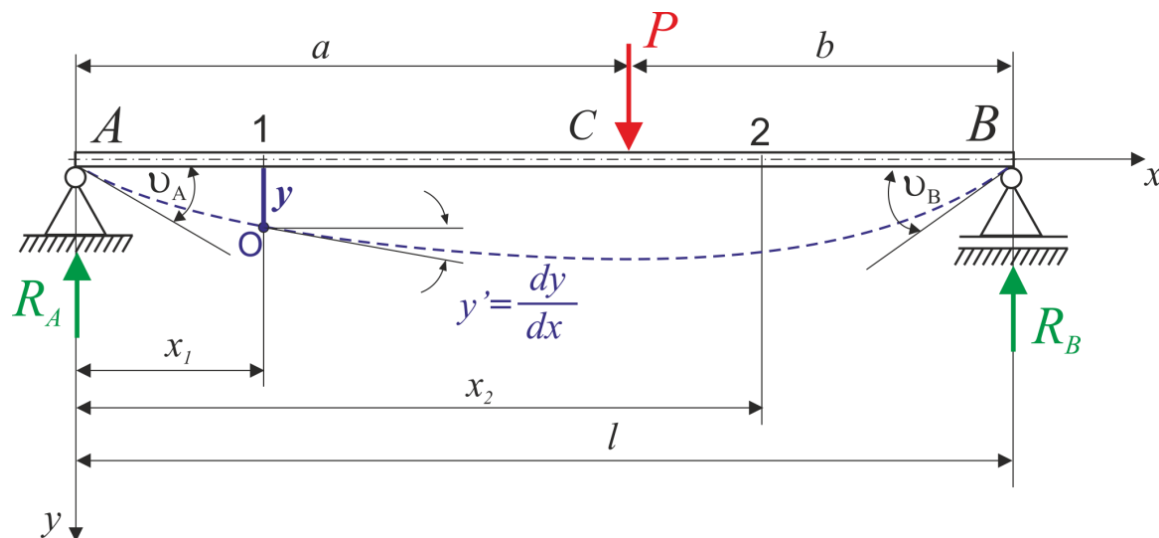


1. Układ od lewej do prawej
2. Oś y skierowana ku dołowi
3. Oś x pokrywa się z osią podłużną belki
4. Płaszczyzna xy jest płaszczyzną symetrii (płaszczyzna zginania)

Ugięcie belki y w odległości x jest przemieszczeniem środka ciężkości przekroju belki, mierzonym od położenia początkowego (przed przyłożeniem obciążenia zewnętrznego)

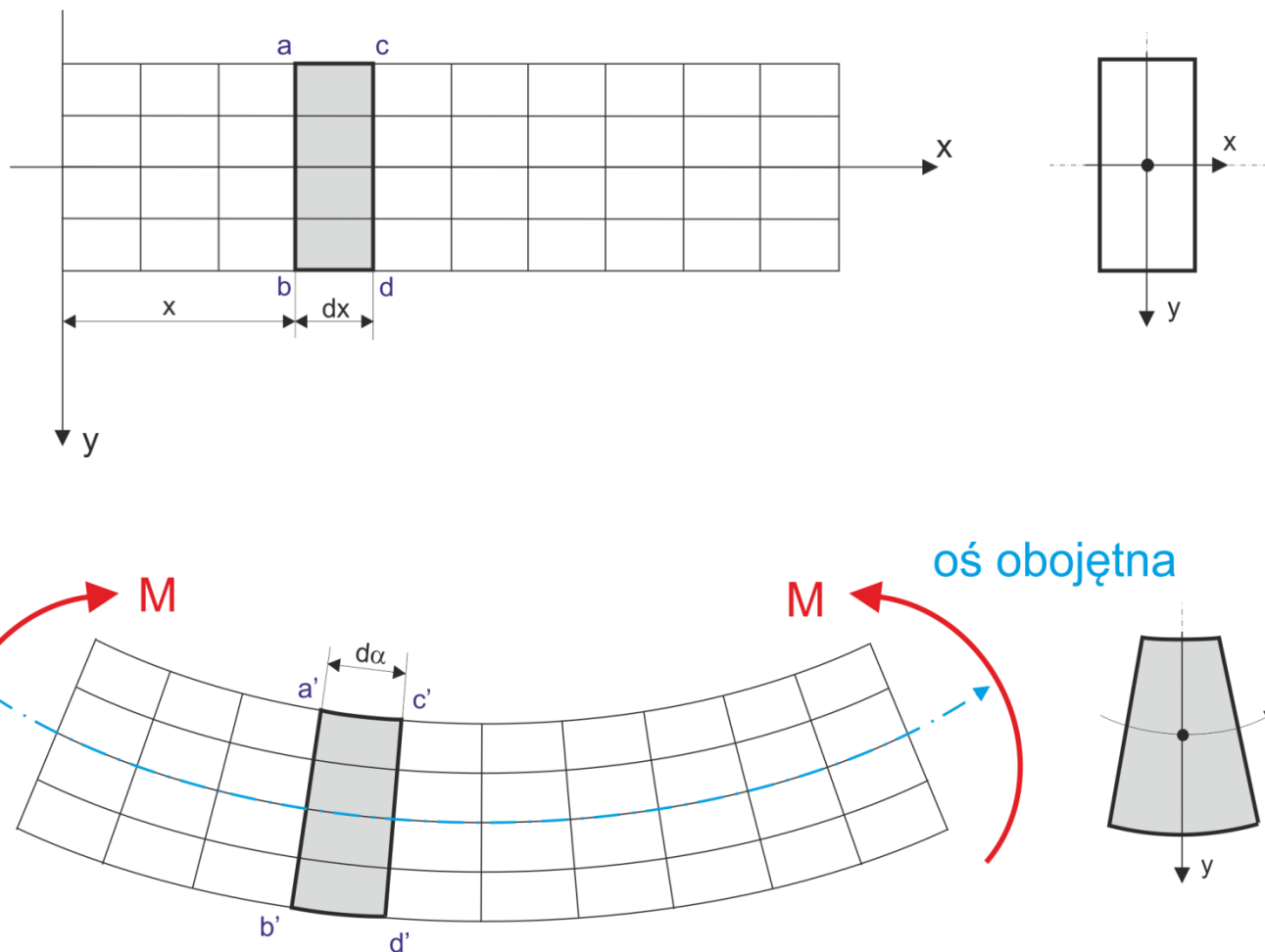
Celem jest wyprowadzenie równania wyrażającego y jako funkcji x , aby uzyskać równanie linii ugięcia belki.

Celem jest wyprowadzenie równania wyrażającego y jako funkcji x , aby uzyskać równanie linii ugięcia belki.



Kąt ugięcia v (zwany również kątem obrotu przekroju belki), który jest kątem pomiędzy osią x i styczną do linii ugięcia w dowolnym punkcie wzdłuż osi belki. Kąt ten jest dodatni, gdy powstaje w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara w przyjętym układzie współrzędnych.

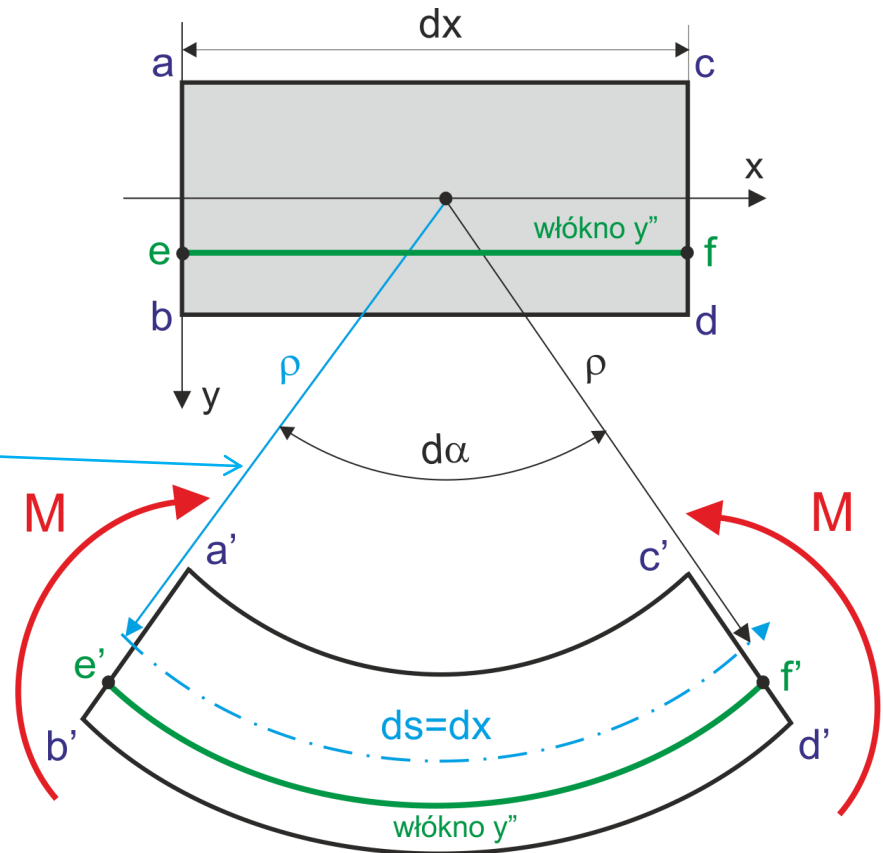
Przy zginaniu belek
obowiązuje założenie
płaskich przekrojów



Włókno podłużne belki w kierunku osi x ulegają skróceniu po stronie wklęsłej i wydłużeniu po stronie wypukłej.

ρ - promień krzywizny osi belki

Włókno leżące na osi x nie doznają odkształceń i tworzą tzw. warstwę obojętną w kierunku osi x i z .



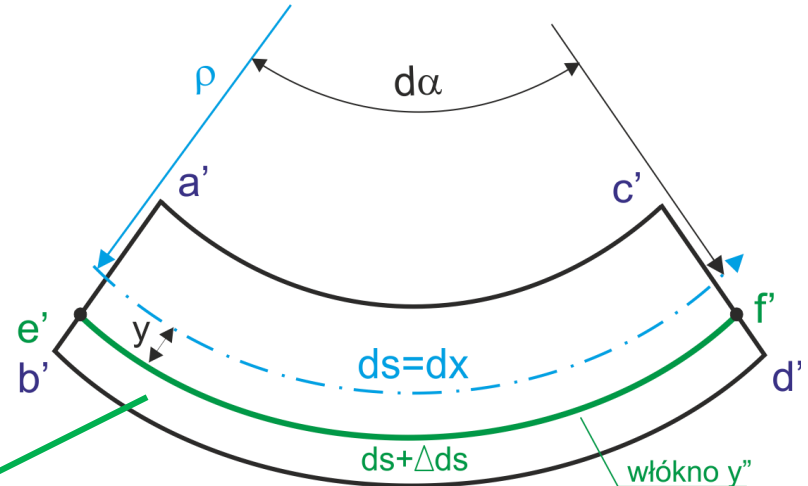
Względna zmiana długości włókna: $\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx}$

$$ds = \rho \cdot d\alpha$$

$$e'f' \rightarrow (ds + \Delta ds) = (\rho + y)d\alpha$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{y \cdot d\alpha}{\rho \cdot d\alpha} = \frac{y}{\rho}$$

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$



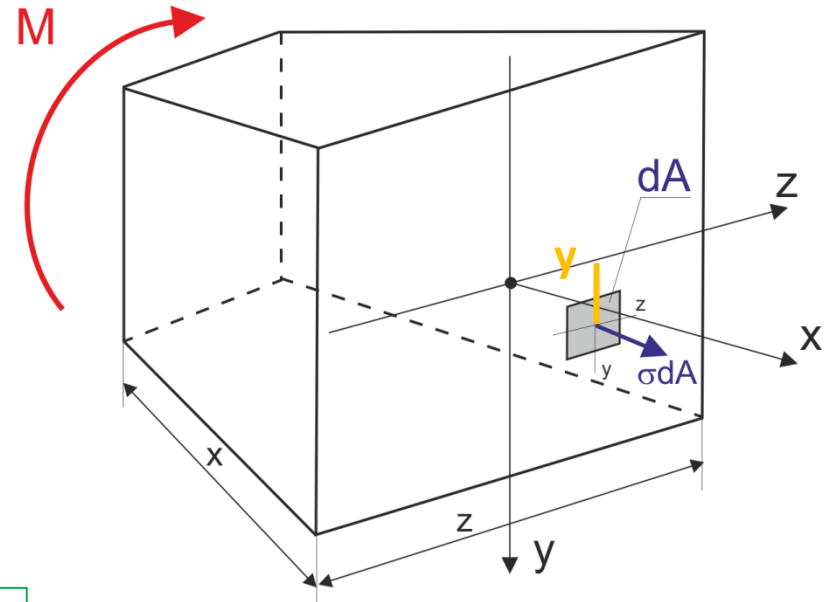
Zakładając, że włókna nie oddziałują na siebie w kierunku osi y uznajemy, że w belce panuje jednoosiowy stan naprężenia dla których:

$$\sigma = \sigma_x = \varepsilon \cdot E$$

$$(3): \sum M_z = 0 \rightarrow \int_A \sigma \cdot dA \cdot y = M$$

$$\frac{E}{\rho} \int_A y \cdot y \cdot dA = M \rightarrow J_z = \int_A y^2 dA$$

Osiowy moment bezwładności



Osie x i y muszą są głównymi centralnymi osiami przekroju (osiami bezwładności)

$$\frac{E}{\rho} \cdot J_z = M \rightarrow \left(\frac{\sigma}{E \cdot y} \right) \cdot J_z \cdot E = M \rightarrow \sigma = \frac{M}{J_z} \cdot y$$

$$\frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA = M$$



$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J_z}$$

Związek ten został wyprowadzony na podstawie geometrii odkształcenia belki przy czystym zginaniu. Gdy oprócz momentu gnącego w belce występują siły tnące, wówczas moment gnący M zmienia się i jest funkcją położenia przekroju wzdłuż długości belki $M=M(x)$.

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \quad \text{- krzywizna belki}$$

Z analizy matematycznej znana jest zależność opisująca krzywiznę dowolnej krzywej płaskiej w układzie współrzędnych xy :

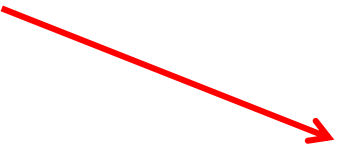
$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Po podstawieniu otrzymujemy:

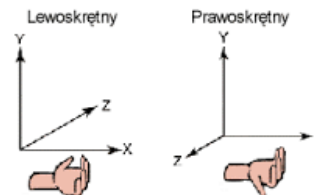
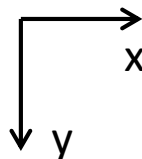
Dla belki zginanej w zakresie sprężystym, gdy ugięcia są niewielkie, linia ugięcia belki jest zwykle krzywą bardzo płaską.

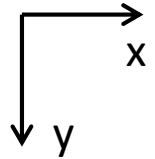
Ograniczając się do takich przypadków, możemy założyć również, że kąt ugięcia jest $v=(dy/dx)$ niewielki i składnik $(dy/dx)^2$ w mianowniku pomijamy jako niewielki w porównaniu z jednością.

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M}{E \cdot J_z}$$


$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{M}{E \cdot J_z}$$

Znak w tym równaniu należy tak przyjąć, aby był zgodny z przyjętym układem współrzędnych:





Moment gnący przyjmujemy za dodatni jeśli wygina belkę wypukłością ku dołowi

W przyjętym układzie współrzędnym widać, że gdy krzywizna belki jest skierowana ku dołowi, wtedy kąt ugięcia maleje wraz ze wzrostem współrzędnej x i dlatego druga pochodna ugięcia y'' jest ujemna. Pochodna ta ma więc przeciwny znak w odniesieniu do M i w związku z tym równanie ma postać:

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE LINII UGIĘCIA BELKI

$$EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x)$$

1. Równanie to stosować można, gdy sztywność belki EJ_z jest wielkością zmienną
2. Jest ograniczone do analizy małych ugięć (zakres geometrycznie liniowy)



Związki różniczkowe

y – ugięcie

$\frac{dy}{dx}$ – kąt ugięcia (kąt obrotu)

$M(x)$ – moment gnący

$$EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x)$$

$$EJ_z \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{dM(x)}{dx} = -T(x)$$

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

$$EJ_z \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{dT(x)}{dx} = q(x)$$

2.1. Metoda bezpośredniego całkowania (metoda analityczna)

$$EJ_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x)$$

Równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu

1. Bezpośrednie dwukrotne całkowanie – otrzymujemy rozwiązanie
2. Wyznaczamy funkcję momentu zginającego

Jeżeli obciążenie zewnętrzne zmienia się nagle przy poruszaniu się wzdłuż osi belki, tzn. że od tego miejsca należy przyjąć nowy przedział zmienności $M(x)$ i opisać równaniami momentu gnącego całą długość belki. Każda nieciągłość momentu gnącego lub kształtu belki musi być początkiem nowego przedziału nieciągłości.

3. Wyrażenie dla momentów gnących $M(x)$ podstawiamy do równania różniczkowego linii ugięcia (dla każdego przedziału oddzielnie), które następnie całkujemy



4. Uzyskujemy w rezultacie równanie kąta ugięcia
- kąta obrotu przekroju belki y'
5. Po każdym całkowaniu uzyskujemy nową stałą całkowania (2 x liczba przedziałów)
6. Drugie całkowanie – druga stała całkowania i otrzymujemy równanie ugięć y
7. Stałe całkowania w każdym przedziale wyznaczamy z warunków brzegowych
(w miejscu podpór) lub warunków ciągłości linii ugięcia, dla ugięcia y i kąta ugięcia y'
8. Wyznaczone z otrzymanych w ten sposób *równań algebraicznych* stałe całkowania podstawiamy z powrotem do równań, w których stałe te występują i uzyskujemy w efekcie komplet równań algebraicznych opisujących kształt (przebieg) linii ugięcia oraz kątów ugięcia belki

METODA ta nazywa się

metodą analityczną

lub

metodą bezpośredniego całkowania równania różniczkowego linii ugięcia belki

Zadanie 1

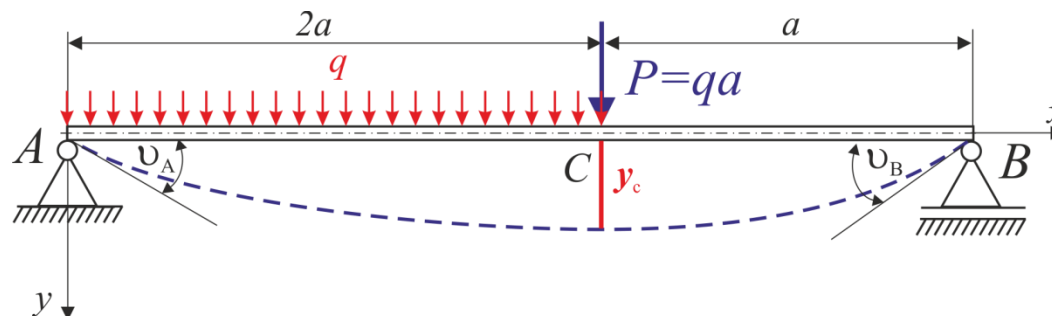
Wyznaczyć ugięcie i kąt ugięcia belki przedstawionej na rysunku stosując metodę analityczną dwukrotnego całkowania

$$C_1 = 14/9qa^3$$

$$D_1 = 0$$

$$C_2 = 38/9qa^3$$

$$D_2 = -2/3qa^4$$

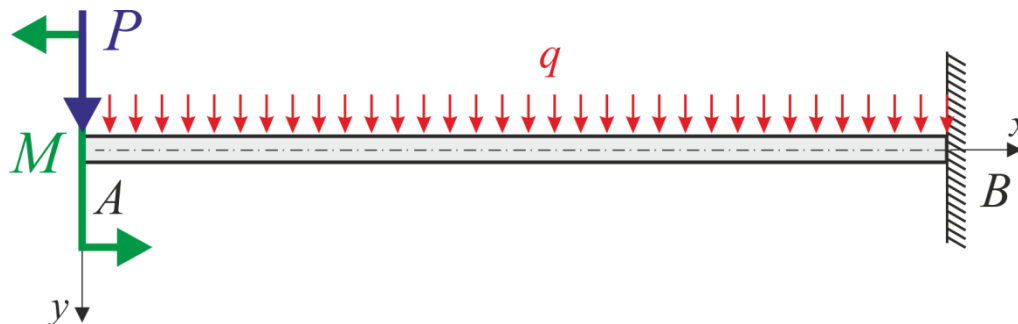


Zadanie 2

Wyznaczyć ugięcie i kąt ugięcia belki przedstawionej na rysunku stosując metodę analityczną dwukrotnego całkowania

$$C_1 =$$

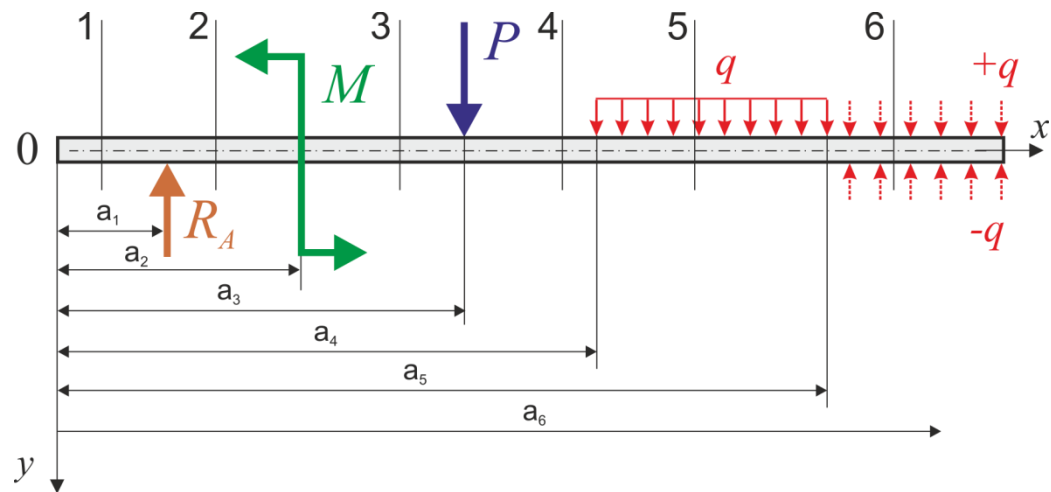
$$D_1 =$$



PRZYKŁAD - Warunki BRZEGOWE

2.2. Uogólniona metoda analityczna (metoda Clebscha)

1. Układ współrzędnych z lewej strony belki – belkę analizujemy od lewej do prawej
2. Analizujemy tylko belki o stałej sztywności – $EJ_z = \text{const.}$
3. Zapisujemy równanie momentów gnących w poszczególnych przedziałach nieciągłości wzdłuż osi x , mając na uwadze, że współrzędna x jest zawsze odmierzana od tego samego początku układu współrzędnych do rozważanego przekroju poprzecznego 1,2,3,...
4. Raz wzięte obciążenie w danym przedziale nieciągłości, nie pojawia się w kolejnym





5. Moment zewnętrzny M musi być pomnożony przez ramię do potęgi zerowej (jest to jedyny sposób zaznaczenia rzeczywistego miejsca przyłożenia tego momentu zewnętrznego, co uwidoczni się w trakcie całkowania równania różniczkowego)
6. Obciążenie zewnętrzne ciągłe, które nie kończy się w prawym przekroju skrajnym belki, należy sztucznie przedłużyć do końca belki, przykładając samozrównoważony układ sił ciągłych ($+q$ oraz $-q$)
7. Stałe całkowania należy wstawiać na początku prawej strony równań i muszą one wchodzić w skład wszystkich przedziałów belki przy wyznaczaniu ugięć i kątów ugięcia (kątów obrotów)

Uwaga:

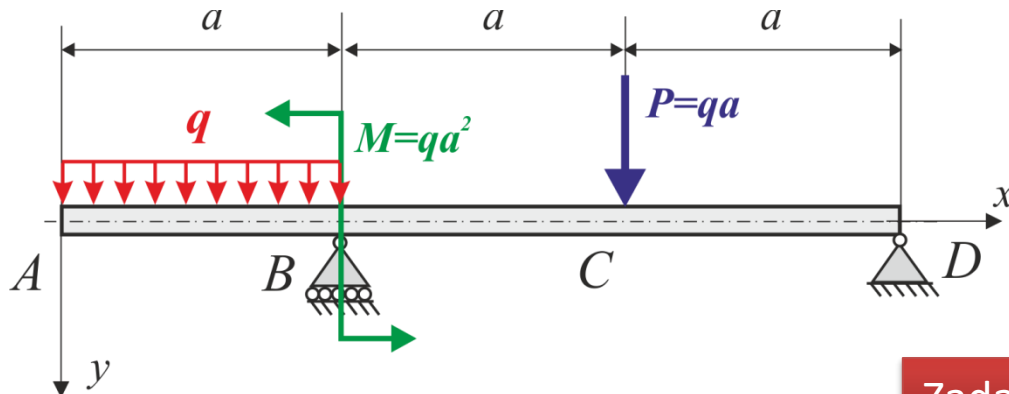
Aby wyznaczyć ugięcie i kąt obrotu w pierwszym przedziale (kolejnych przedziałach), należy wykorzystać wyłącznie składniki leżące po lewej stronie pionowej linii z indeksem 1, dla przedziału drugiego uwzględnić wszystkie składniki od znaku równości do pionowej linii z indeksem 2, itd. (znak wyrażeń w nawiasach nie może być ujemny)

Zadanie 1

Wyznaczyć ugięcie i kąt ugięcia belki przedstawionej na rysunku stosując metodę analityczną CLEBSCHA

$$C = -11/12 qa^3$$

$$D = 7/8 qa^4$$

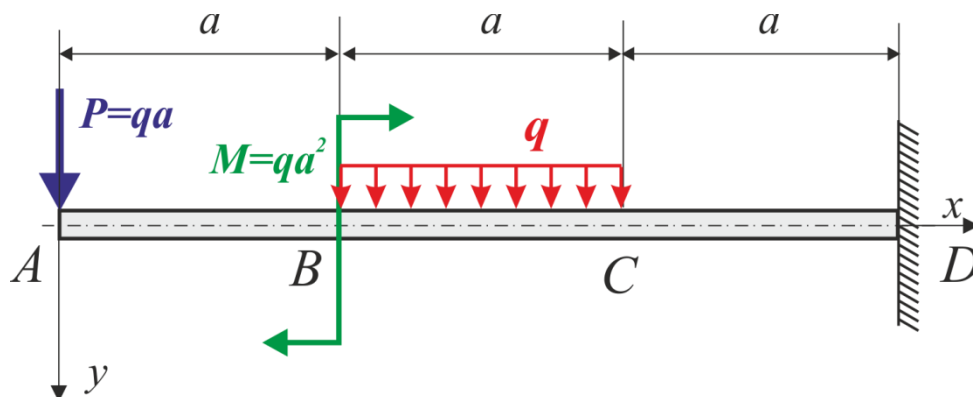


Zadanie 2

Wyznaczyć ugięcie i kąt ugięcia belki przedstawionej na rysunku stosując metodę analityczną CLEBSCHA

$$C = -4/3 qa^3$$

$$D = 7/8 qa^4$$



PRZYKŁAD - Warunki BRZEGOWE



2.3. Metoda analityczno-graficzna (obciążeń wtórnych) – Metoda MOHRA

Zwana metodą obciążeń fikcyjnych

Wykorzystuje się w tej metodzie pewne właściwości, jakie ma wykres momentu gnącego dla belki – metoda pozwala uzyskać szybko wyniki ugięcia i kąta obrotu w określonym przekroju. Wykorzystuje się tutaj analogię pomiędzy równaniem różniczkowym linii ugięcia belki i związkami różniczkowymi pomiędzy momentem gnącym i obciążeniem ciągłym.

$$EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x)$$

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -q(x)$$

Metodę analityczno-graficzną można stosować dla belek o zmiennej sztywności, przyjmując tzw. sztywność zastępczą

Belka fikcyjna (wtórna), ma taki sam kształt i wymiary jak rozważana belka (pierwotna)

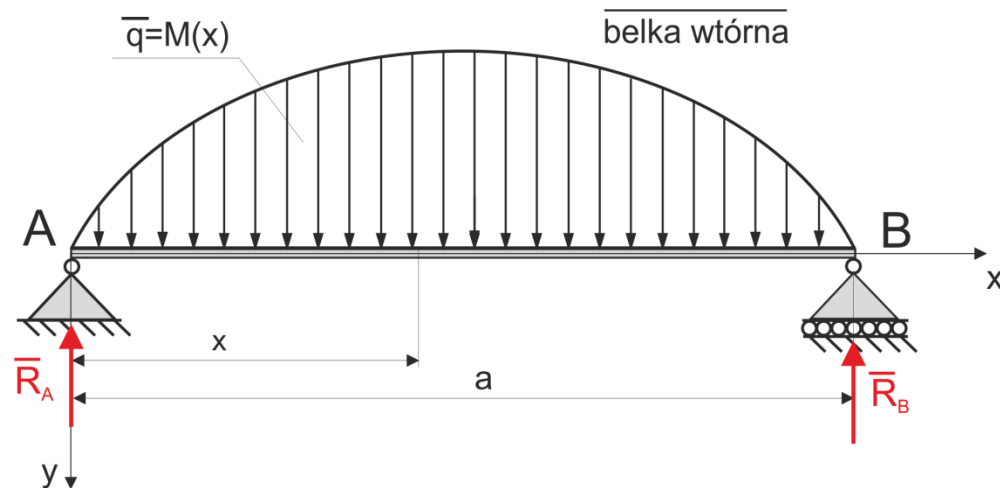
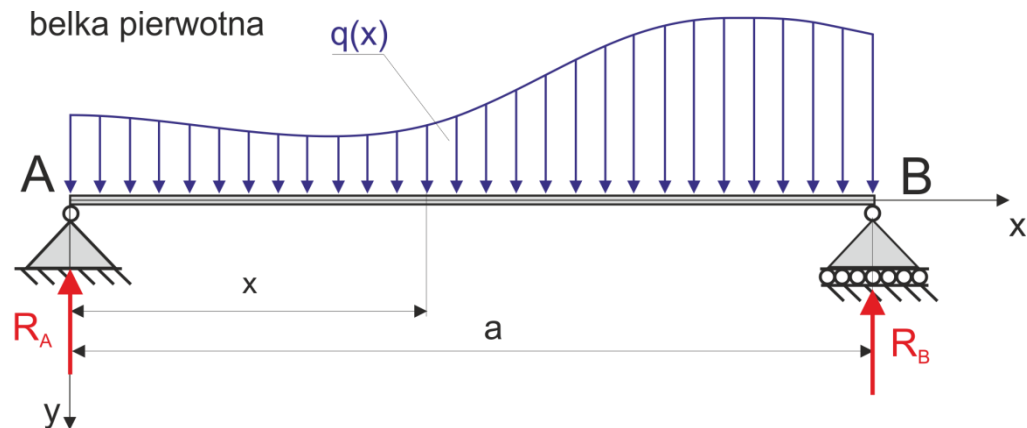
Znak obciążenia fikcyjnego:

$$\oplus M \Rightarrow \bar{q} \downarrow$$

$$\ominus M \Rightarrow \bar{q} \uparrow$$

Zakładamy, że zwrot obciążenia fikcyjnego \bar{q} będzie dodatni (lub skierowany ku dołowi), gdy znak na wykresie momentu gnącego jest dodatni

$$\bar{q} = M(x)$$





$$\bar{q} = M(x)$$

Belka rzeczywista	Belka fikcyjna
$T(x) = \frac{dM(x)}{dx}$	$\bar{T}(x) = \frac{d\bar{M}(x)}{dx}$
$q(x) = -\frac{dT(x)}{dx}$	$q(x) = -\frac{d\bar{T}(x)}{dx}$
$q(x) = -\frac{d^2M(x)}{dx^2}$	$q(x) = -\frac{d^2\bar{M}(x)}{dx^2}$

Równanie różniczkowe dla belki rzeczywistej:

$$EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x)$$

Równanie różniczkowe dla belki fikcyjnej:

$$EJ_z \frac{d^2 \bar{M}(x)}{dx^2} = -\bar{q}(x)$$

stąd $EJ_z \cdot \frac{d^2 \bar{M}(x)}{dx^2} = -M(x)$

Porównując:

$$EJ_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x)$$

$$\frac{d^2 \bar{M}(x)}{dx^2} = -M(x)$$

Otrzymujemy:

$$EJ_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 \bar{M}(x)}{dx^2}$$

Belka rzeczywista	Belka fikcyjna
$T(x) = \frac{dM(x)}{dx}$	$\bar{T}(x) = \frac{d\bar{M}(x)}{dx}$
$q(x) = -\frac{dT(x)}{dx}$	$q(x) = -\frac{d\bar{T}(x)}{dx}$
$q(x) = -\frac{d^2 M(x)}{dx^2}$	$q(x) = -\frac{d^2 \bar{M}(x)}{dx^2}$

Jak widać, moment gnący w belce pierwotnej został zastąpiony drugą pochodną momentu gnącego w belce fikcyjnej w równaniu różniczkowym linii ugięcia belki

Przez dwukrotne scałkowania równania:

Otrzymujemy:

$$EJ_z y = \bar{M}(x) + Cx + D$$



$$EJ_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 \bar{M}(x)}{dx^2}$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych.

Dla belki swobodnie podpartej na końcach, otrzymujemy:

1. $EJ_z = 0$ oraz $\bar{M} = 0$ dla $x = 0$, skąd $D = 0$,

2. $EJ_z = 0$ oraz $\bar{M} = 0$ dla $x = l$, skąd $C = 0$,

gdzie y jest ugięciem dla belki pierwotnej:

$$y = \frac{\bar{M}(x)}{E \cdot J_z}$$

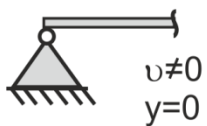
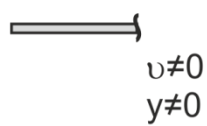
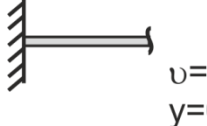
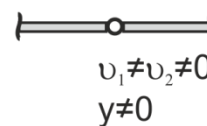
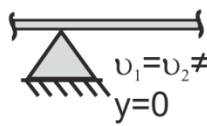
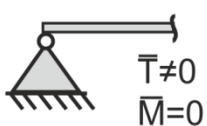

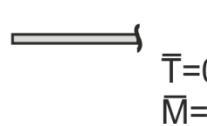
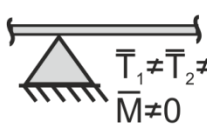
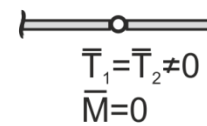
Podobne wynik można uzyskać dla innego sposobu podparcia belki, wiedząc, że pochodna ugięcia względem zmiennej x jest równa kątowi ugięcia:

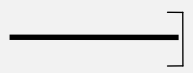
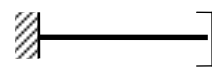

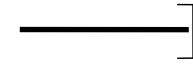

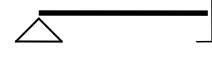
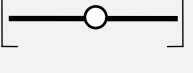
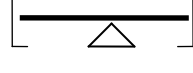
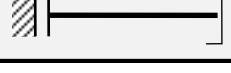
$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EJ_z} \frac{d\bar{M}(x)}{dx} = \frac{\bar{T}(x)}{EJ_z}$$



$$\theta = \frac{\bar{T}(x)}{E \cdot J_z}$$

Zamiana belki rzeczywistej na belkę fikcyjną

BELKA PIERWOTNA	 $v \neq 0$ $y = 0$	 $v \neq 0$ $y \neq 0$	 $v = 0$ $y = 0$	 $v_1 \neq v_2 \neq 0$ $y \neq 0$	 $v_1 = v_2 \neq 0$ $y = 0$
BELKA WTÓRNA (fikcyjna)	 $\bar{T} \neq 0$ $\bar{M} = 0$	 $\bar{T} \neq 0$ $\bar{M} \neq 0$	 $\bar{T} = 0$ $\bar{M} = 0$	 $\bar{T}_1 \neq \bar{T}_2 \neq 0$ $\bar{M} \neq 0$	 $\bar{T}_1 = \bar{T}_2 \neq 0$ $\bar{M} = 0$

BELKA RZECZYWISTA		BELKA FIKCYJNA	
war. kinematyczne	schemat	schemat	war. statyczne
$w \neq 0$, $w' \neq 0$			$M^f \neq 0$, $Q^f \neq 0$
$w = 0$, $w' = 0$			$M^f = 0$, $Q^f = 0$
$w = 0$, $w' \neq 0$			$M^f = 0$, $Q^f \neq 0$
$w \neq 0, w' \neq 0$			$M^f \neq 0, Q \neq 0$
$w \neq 0$, $w' = 0$			$M^f \neq 0$, $Q^f = 0$

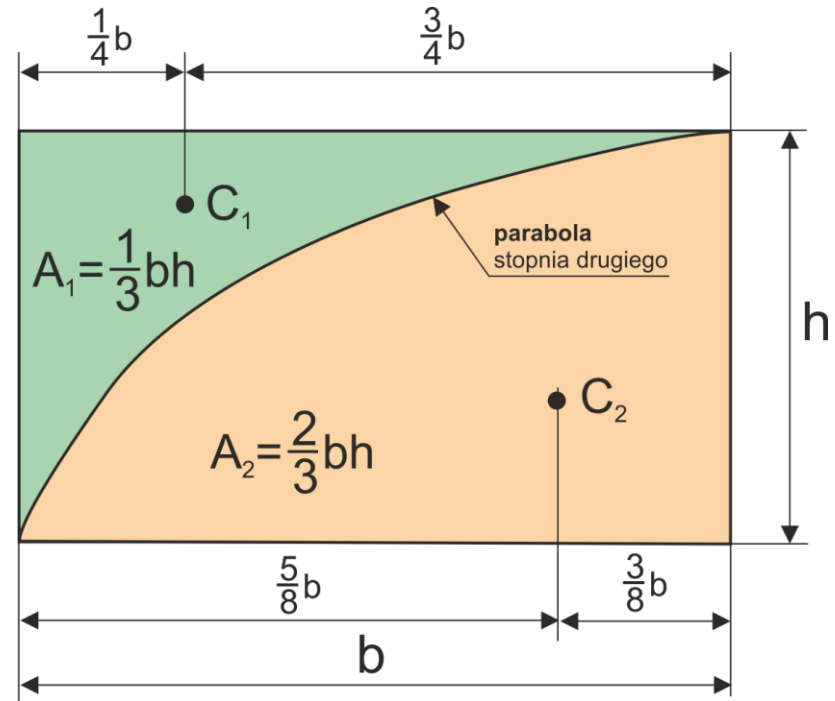
Założenia:

1. Belkę fikcyjną „obciążamy” polem wykresu momentów gnących z belki rzeczywistej

$$\bar{M} = M_f \quad \bar{T} = T_f$$

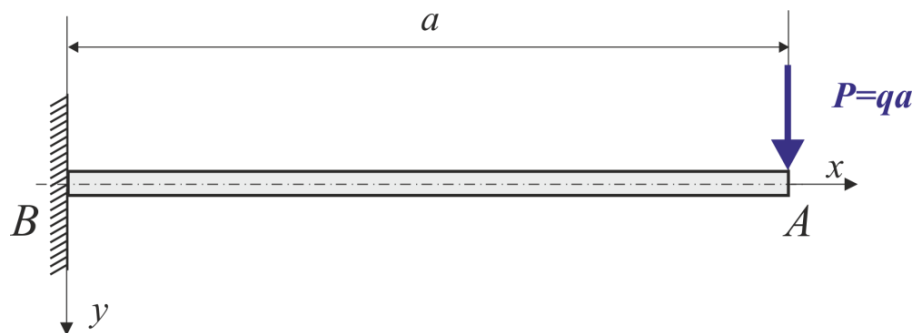
⊕ $M \Rightarrow \bar{q} \downarrow$

⊖ $M \Rightarrow \bar{q} \uparrow$



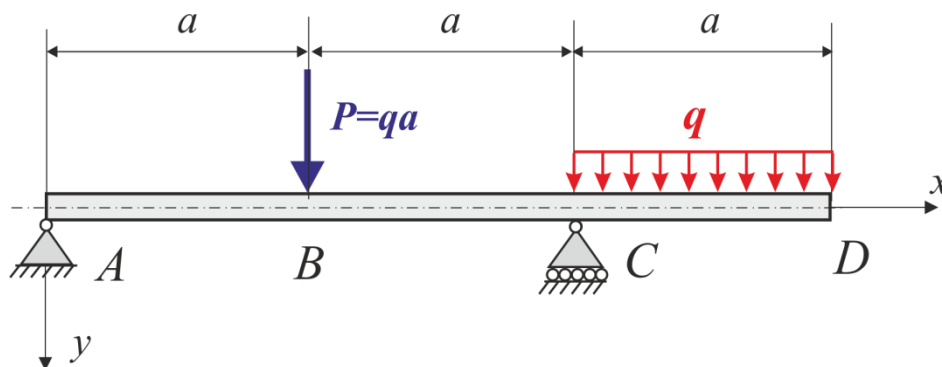
Zadanie 1

Wyznaczyć ugięcie (w punkcie A) i kąt ugięcia (w punkcie A) belki przedstawionej na rysunku stosując metodę analityczną ANALITYCZNO-GRAFICZNĄ (obciążeń fikcyjnych)



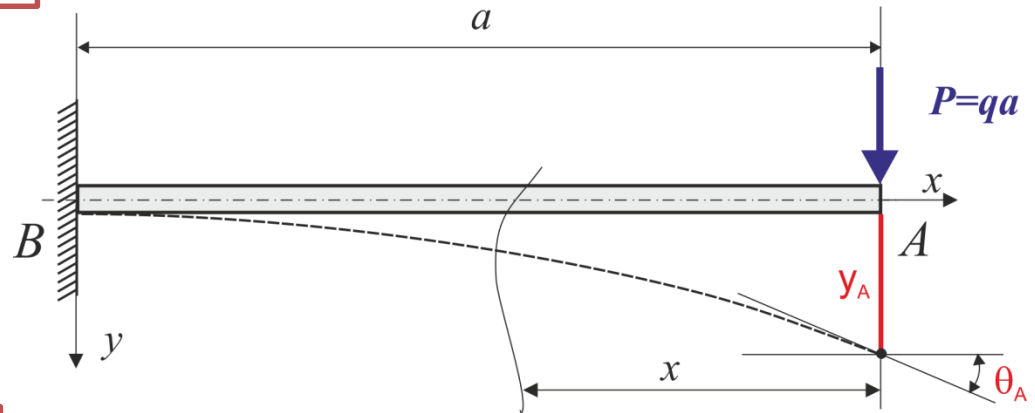
Zadanie 2

Wyznaczyć ugięcie (w punkcie D) i kąt ugięcia (w punkcie D) belki przedstawionej na rysunku stosując metodę analityczną ANALITYCZNO-GRAFICZNĄ (obciążeń fikcyjnych)

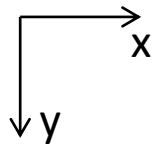


Belka rzeczywista:

$$M(x) = -Px$$



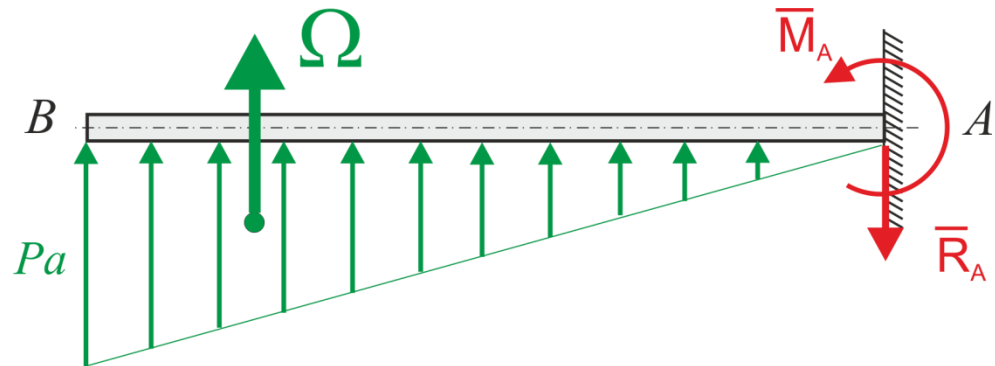
Belka fikcyjna:



$$\sum \bar{F}_y = 0 \quad \sum \bar{M}_A = 0$$

$$\oplus M \Rightarrow \bar{q} \downarrow$$

$$\ominus M \Rightarrow \bar{q} \uparrow$$



Równania równowagi statycznej:

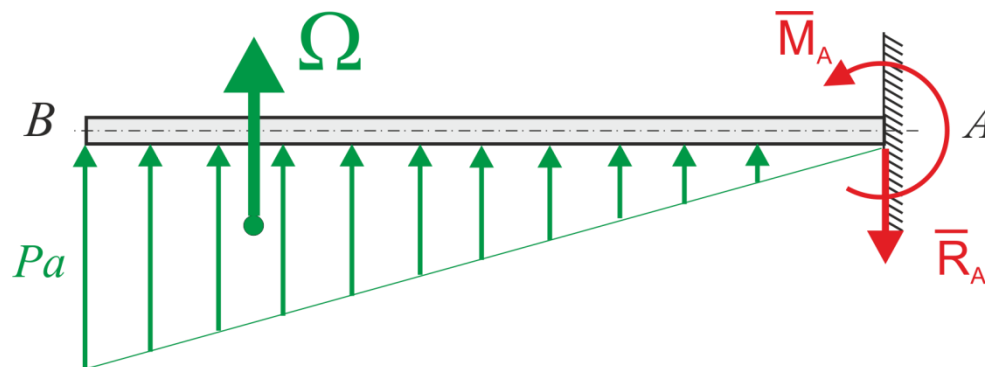
$$\sum \bar{F}_y = 0 \rightarrow -\Omega + \bar{R}_A = 0$$

$$\sum \bar{M}_A = 0 \rightarrow -\Omega \cdot \frac{2}{3}a + \bar{M}_A = 0$$

Obliczamy:

$$\bar{R}_A = \Omega = \frac{1}{2}Pa^2$$

$$\bar{M}_A = \Omega \cdot \frac{2}{3}a = \frac{1}{2}Pa^2 \cdot \frac{2}{3}a = \frac{1}{3}Pa^3$$



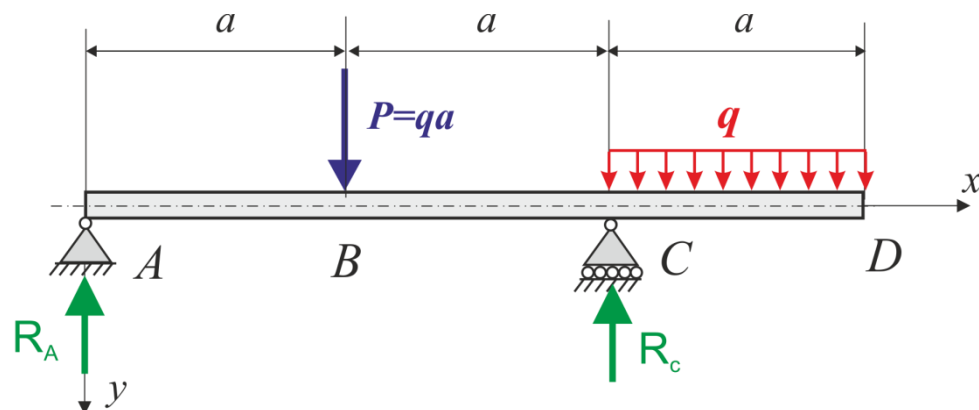
$$\Omega = \text{pole trójkąta} \rightarrow \Omega = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \cdot a \cdot Pa = \frac{Pa^2}{2}$$

Wyznaczamy:

$$\bar{T}_A = \bar{R}_A \quad \bar{M}_A = \bar{M}_A$$

$$y_A = \frac{\bar{M}_A}{EJ_z} = \frac{Pa^3}{3EJ_z}$$

$$\theta_A = \frac{\bar{T}_A}{EJ_z} = \frac{Pa^2}{2EJ_z}$$

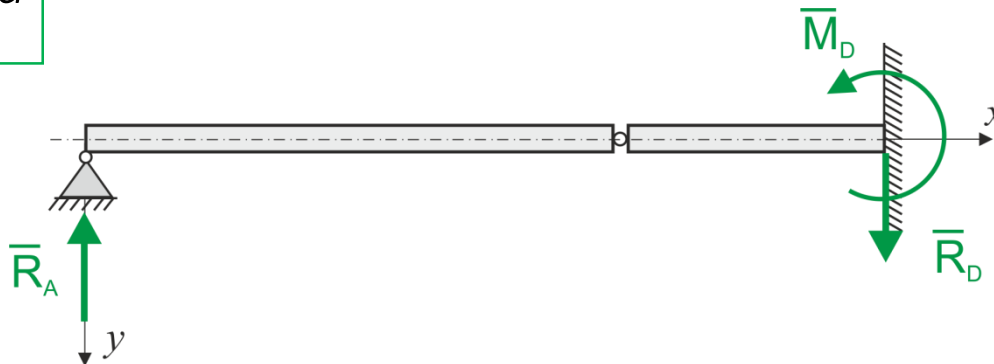
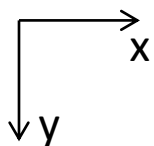


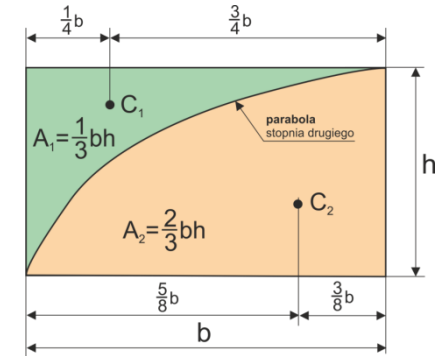
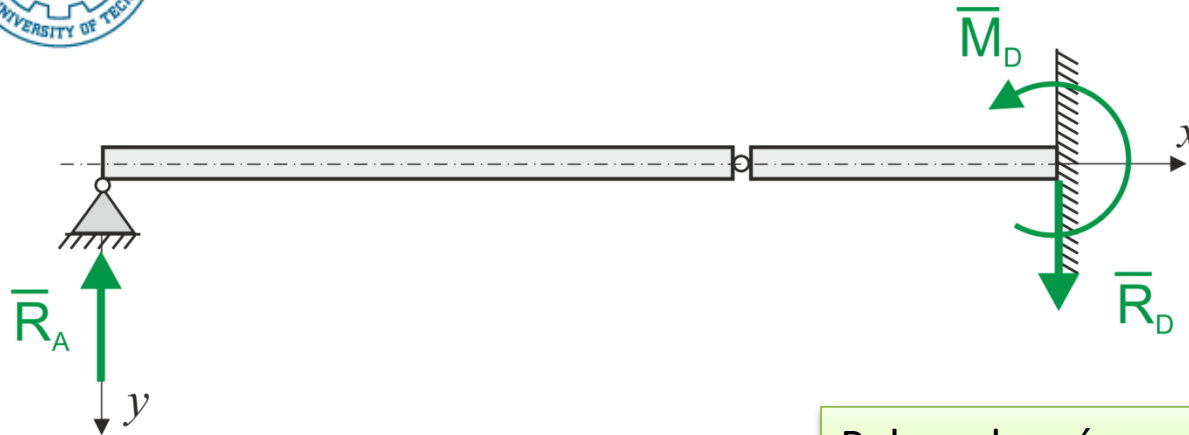
$$R_A = \frac{1}{4}qa \text{ i } R_C = \frac{7}{4}qa$$

Równania równowagi statycznej:

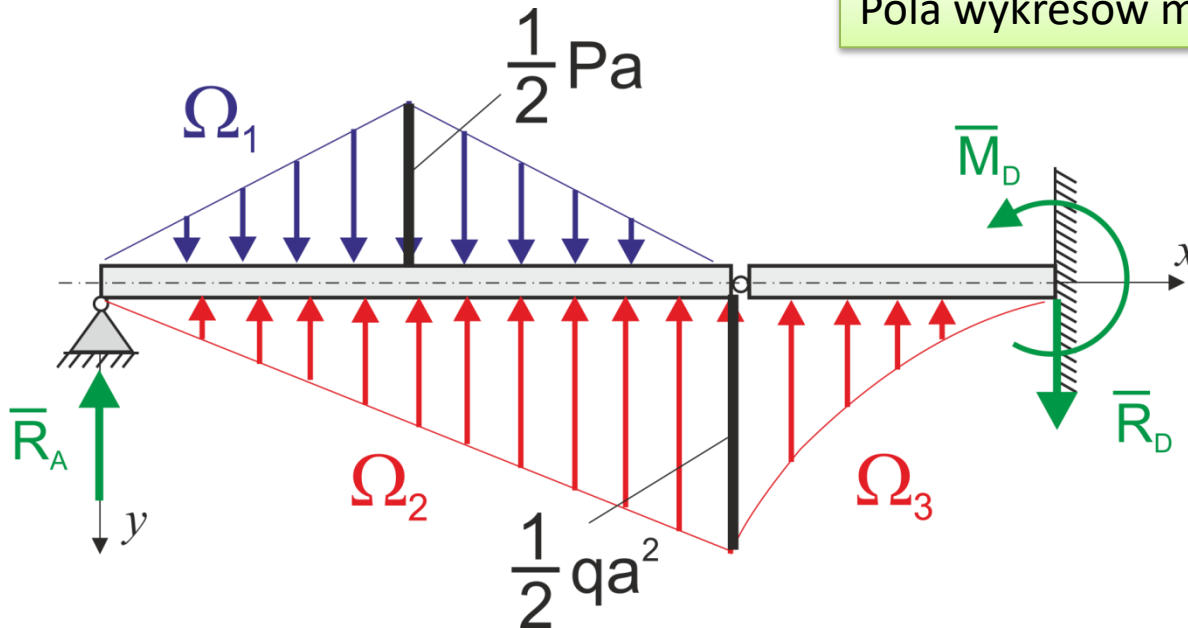
$$\sum F_y = 0 \rightarrow -R_A - R_C + P - qa = 0$$

$$\sum M_c = 0 \rightarrow -R_A \cdot 2a + P \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{1}{2}a = 0$$





Pola wykresów momentów gnących:

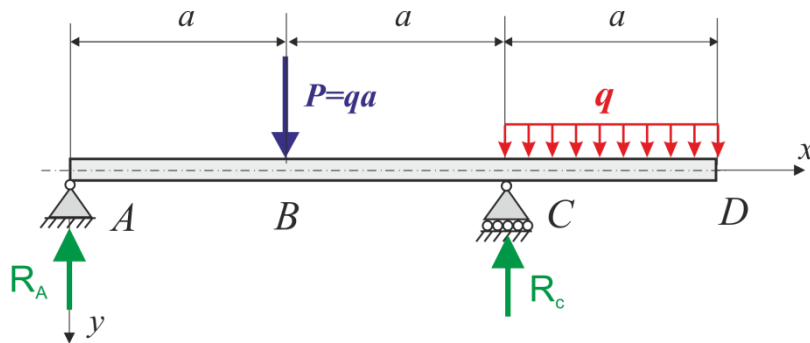


$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{Pa}{2} = \frac{Pa^2}{2}$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{qa^2}{2} = \frac{qa^3}{2}$$

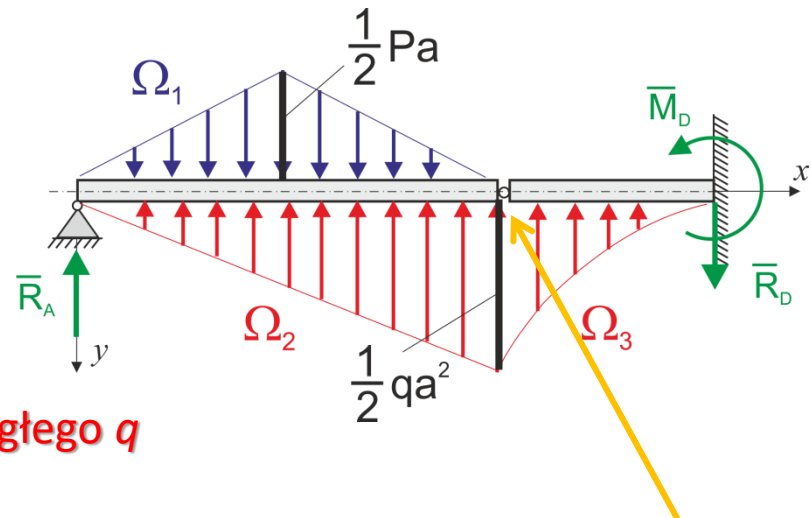
$$\Omega_3 = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{qa^2}{2} = \frac{qa^3}{6}$$

Belka rzeczywista



Wykres momentu gnącego od obciążenia ciągłego q

Wykres momentu gnącego od obciążenia P



Przegub w belce nie przenosi momentu gnącego $M_c=0$

Pisząc równania statyki dla belki fikcyjnej otrzymujemy 3 niewiadome dla 2 równań statyki.

Aby wyznaczyć reakcje podporowe (reakcje fikcyjne): $\bar{R}_A, \bar{R}_D, \bar{M}_D$

„rozbijamy” belkę w przegubie C na dwie części:

\overline{AC} i \overline{CD}

Równania statyki dla belek fikcyjnych:

belka: \overline{AC}

$$\sum \bar{F}_y = 0 \rightarrow -\bar{R}_A + \bar{R}_C + \Omega_1 - \Omega_2 = 0$$

$$\sum \bar{M}_A = 0 \rightarrow -\Omega_1 \cdot a + \Omega_2 \cdot \frac{4}{3}a - \bar{R}_C \cdot 2a = 0$$

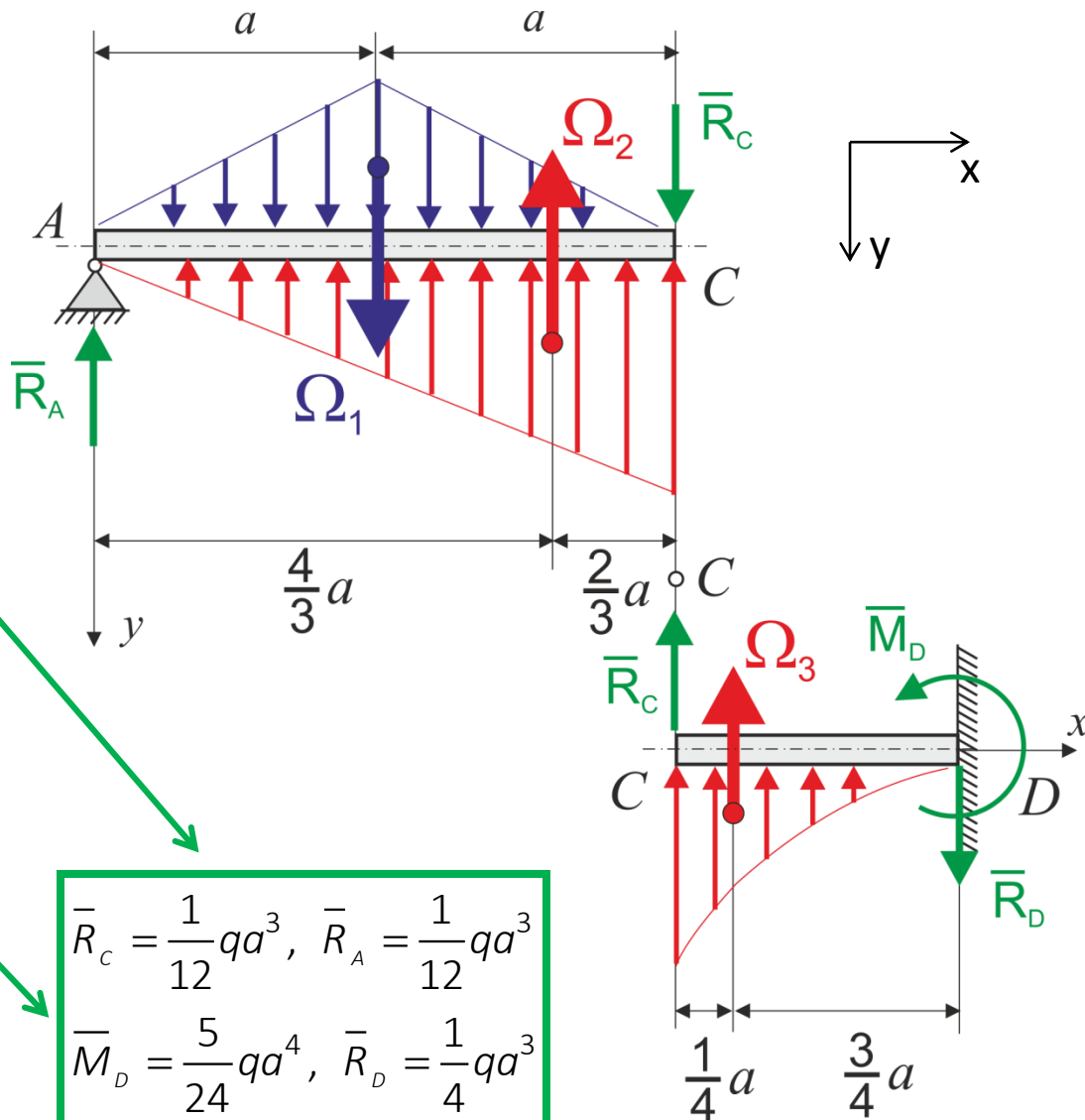
belka: \overline{CD}

$$\sum \bar{F}_y = 0 \rightarrow -\bar{R}_C + \bar{R}_D + \Omega_3 = 0$$

$$\sum \bar{M}_D = 0 \rightarrow -\bar{R}_C \cdot a - \Omega_2 \cdot \frac{3}{4}a + M_D = 0$$

$$\bar{R}_C = \frac{1}{12}qa^3, \bar{R}_A = \frac{1}{12}qa^3$$

$$\bar{M}_D = \frac{5}{24}qa^4, \bar{R}_D = \frac{1}{4}qa^3$$



Zostały wyliczone wartości podporowe dla belki fikcyjnej:

Wielkości wewnętrzne liczone są z definicji:

$$y = \frac{\bar{M}(x)}{E \cdot J_z} \quad \theta = \frac{\bar{T}(x)}{E \cdot J_z}$$

$$\bar{R}_C = \frac{1}{12}qa^3, \quad \bar{R}_A = \frac{1}{12}qa^3$$
$$\bar{M}_D = \frac{5}{24}qa^4, \quad \bar{R}_D = \frac{1}{4}qa^3$$

$$\theta_A = v_A = \frac{\bar{T}_A}{E \cdot J_z} \rightarrow \bar{T}_A = +\bar{R}_A \Rightarrow v_A = \frac{qa^3}{12EJ_z}$$

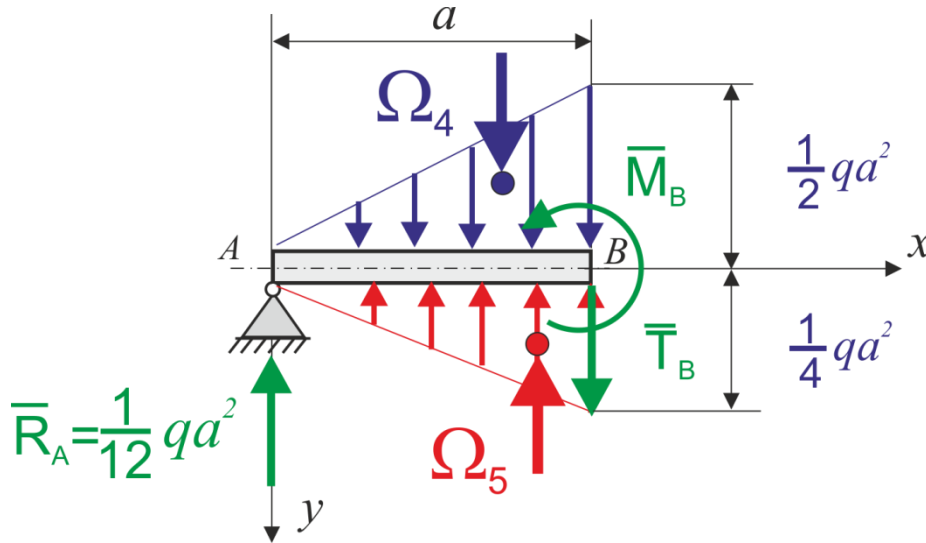
$$\theta_C = v_C = \frac{\bar{T}_C}{E \cdot J_z} \rightarrow \bar{T}_C = +\bar{R}_C \Rightarrow v_C = \frac{qa^3}{12EJ_z}$$

$$\bar{M}_D = \frac{5}{24}qa^4 \rightarrow y_D = \frac{\bar{M}_D}{E \cdot J_z}$$

$$y_D = \frac{5qa^4}{24EJ_z}$$

$$\theta_D = v_D = \frac{\bar{T}_D}{E \cdot J_z} \rightarrow \bar{T}_D = +\bar{R}_D \Rightarrow v_D = \frac{qa^3}{4EJ_z}$$

Aby obliczyć ugięcie w przekroju B należy wyliczyć siły wewnętrzne w tym przekroju
OCZYWIŚCIE w belce FIKCYJNEJ, tj. \bar{T}_B i \bar{M}_B



$$\bar{R}_B = -\frac{1}{24}qa^3, \bar{M}_B = \frac{1}{24}qa^4$$

$$\theta_B \rightarrow v_B = \frac{\bar{T}_B}{E \cdot J_z} = \frac{\bar{R}_B}{E \cdot J_z} = -\frac{qa^3}{24EJ_z}$$

$$y_B \rightarrow y_B = \frac{\bar{M}_B}{E \cdot J_z} = \frac{qa^3}{24EJ_z}$$

$$\Omega_4 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{qa}{2} = \frac{qa^2}{4}$$

$$\Omega_5 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{qa}{4} = \frac{qa^2}{8}$$

belka: AB

$$\sum \bar{F}_y = 0 \rightarrow -\bar{R}_A + \bar{T}_B + \Omega_4 - \Omega_5 = 0$$

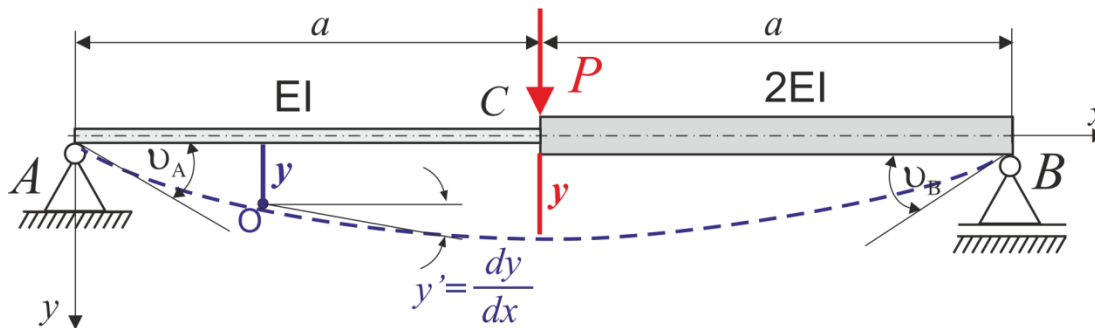
$$\sum \bar{M}_B = 0 \rightarrow -\bar{R}_A \cdot a + (\Omega_4 - \Omega_5) \cdot \frac{1}{3}a + \bar{M}_B = 0$$

Belki o zmiennej sztywności – Metoda A-G

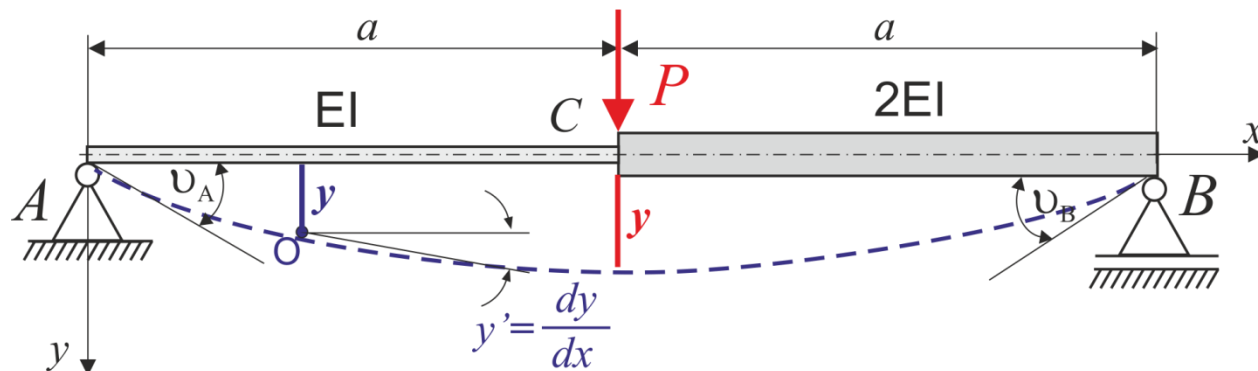
Metoda analityczno-graficzna **bardzo dobrze** nadaje się do obliczania ugięć i kątów obrotu w belkach o zmiennej sztywności (sztywność zmienna skokowo). Wprowadzamy wówczas tzw. sztywność zastępczą EJ_{zast} równą sztywności dowolnego odcinka belki.

Na pozostałych odcinkach belki, w których sztywności rzeczywiste różnią się od sztywności zastępczej zmieniamy odpowiednio rzędne obciążenia fikcyjnego proporcjonalnie do stosunku:

$$\frac{EJ_{rzecz}}{EJ_{zast}}$$



Zadanie 1



$$EJ_{zast} = 2EJ_z$$

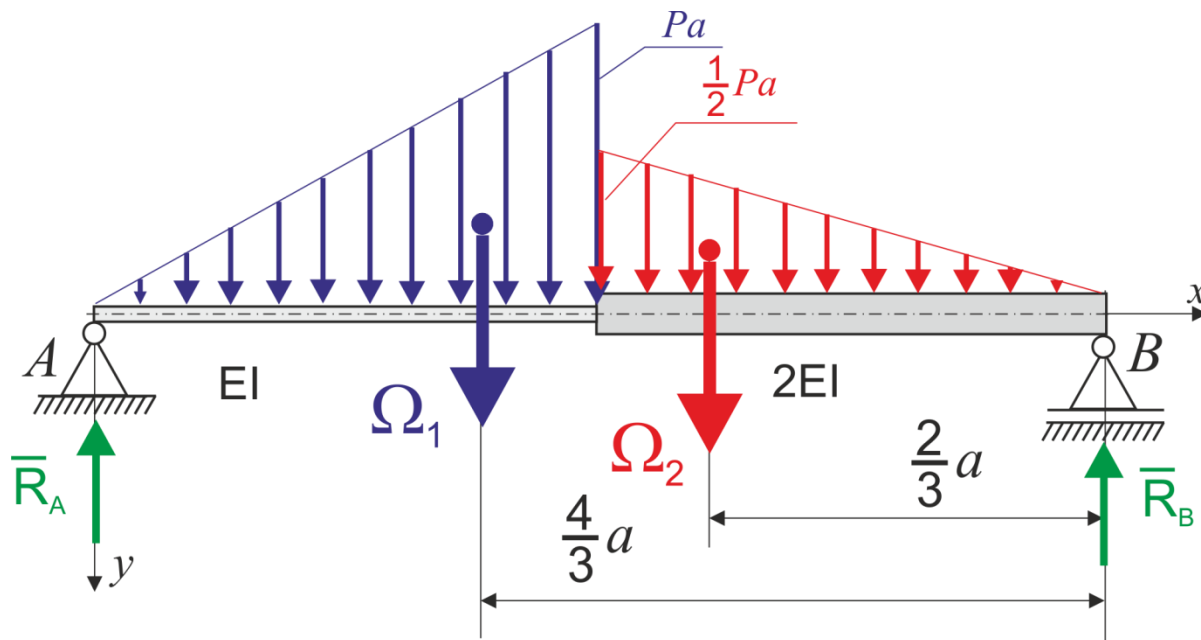
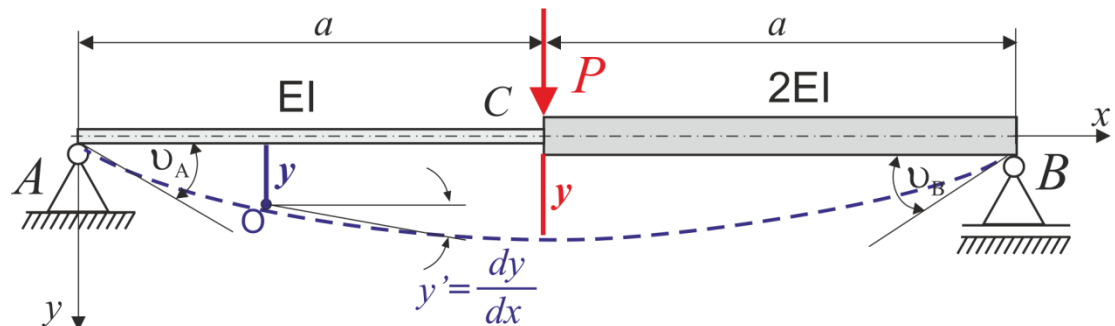
W części pierwszej: $\frac{2EJ}{EJ_{zast}} = 1$

W części drugiej: $\frac{EJ_z}{EJ_{zast}} = \frac{1}{2}$

Czyli w części I POWIĘKSZAMY dwukrotnie rzędne wykresu: \bar{q}

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot Pa = \frac{Pa^2}{2}$$

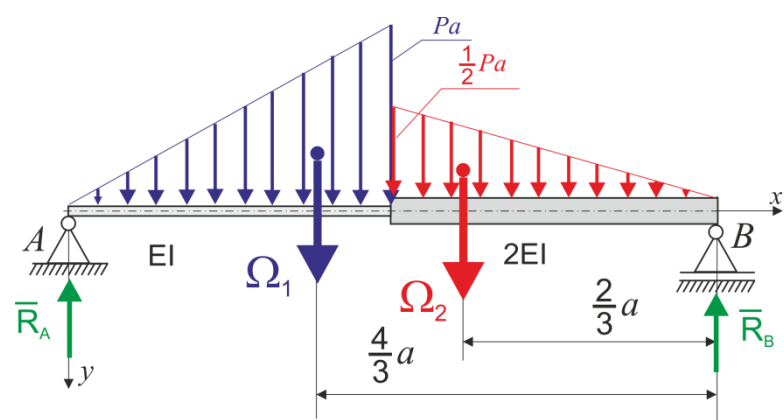
$$\Omega_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{Pa}{2} = \frac{Pa^2}{4}$$



belka: \overline{AB}

$$\sum \bar{F}_y = 0 \rightarrow -\bar{R}_A - \bar{R}_c + \Omega_1 + \Omega_2 = 0$$

$$\sum \bar{M}_B = 0 \rightarrow \bar{R}_A \cdot 2a + \Omega_1 \cdot \frac{4}{3}a + \Omega_2 \cdot \frac{2}{3}a = 0$$



$$\bar{R}_A = \frac{5}{12}Pa^2, \bar{R}_B = \frac{1}{3}Pa^2$$

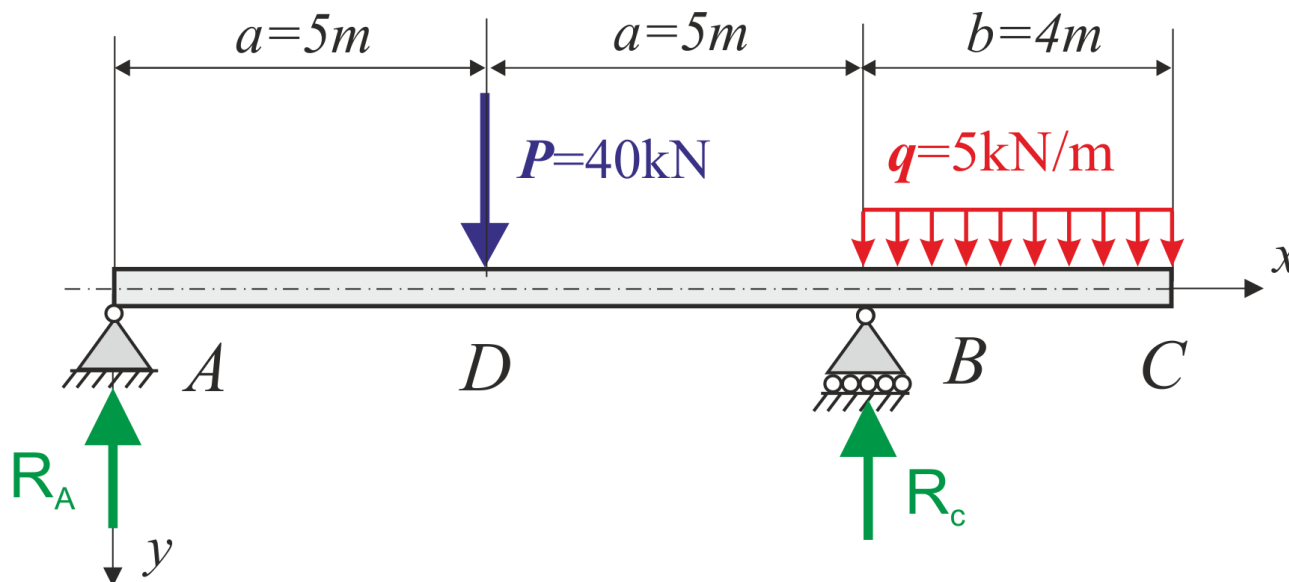
$$\theta_A \rightarrow v_A = \frac{\bar{T}_A}{E \cdot J_{zast}} = \frac{\bar{R}_A}{2 \cdot E \cdot J_z} = \frac{5Pa^2}{24EJ_z}$$

$$\theta_B \rightarrow v_B = \frac{\bar{T}_B}{E \cdot J_{zast}} = \frac{\bar{R}_B}{2 \cdot E \cdot J_z} = \frac{Pa^2}{6EJ_z}$$

2.4. Metoda porównywania przemieszczeń (Metoda SUPERPOZYCJI)

Przykład 1

Dla belki przedstawionej na rysunku obliczyć ugięcie i kąt obrotu punktu C.
Przyjąć: $a = 5 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $P = 40 \text{ kN}$, $q = 5 \text{ kN/m}$, $EJ_z = 50 \text{ MNm}^2$.



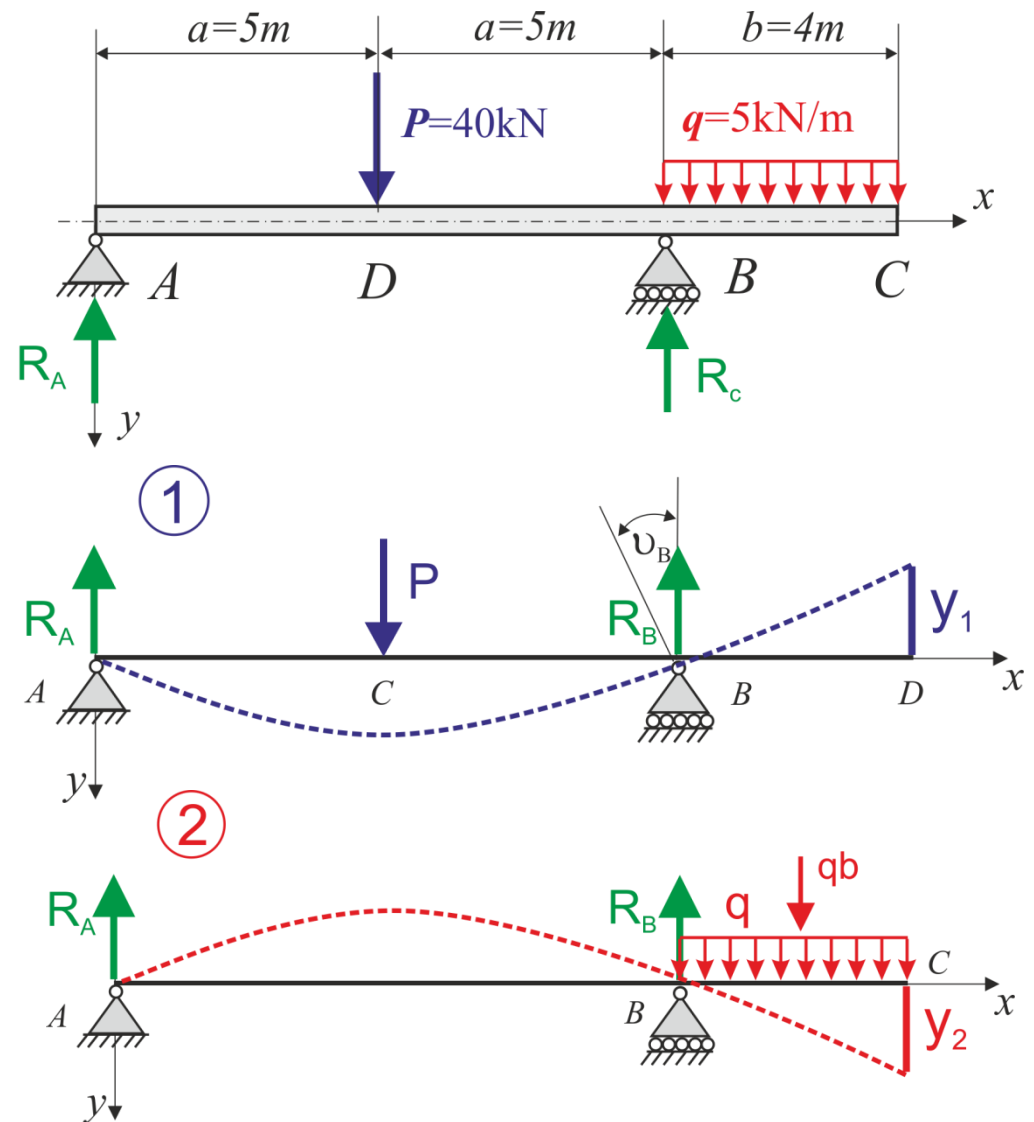
1. Belka obciążona siłą P:

$$v_{B1} = \frac{PL^2}{16EJ} = \frac{Pa^2}{4EJ} =$$

$$= -\frac{40 \cdot 5^2}{4 \cdot 50} \cdot 10^{-3} = -0,005 \text{ rad} = -0,29^\circ,$$

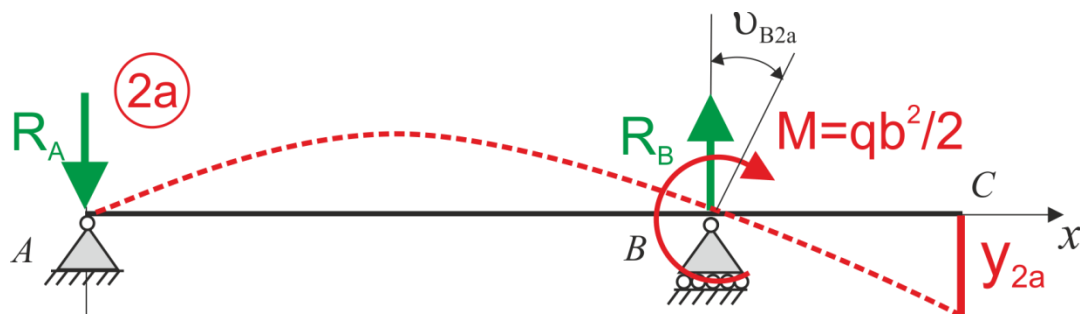
$$y_1 = b \cdot \operatorname{tg} v_{B1} \approx b \cdot v_{B1} =$$

$$= 4 \cdot (-0,005) \cdot 10^3 = -20 \text{ mm}$$



2. Belka obciążona rozłożoną równomiernie siłą q :

2a. Odształcenie przęsła AB

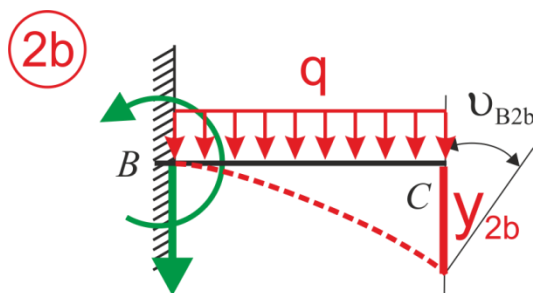


$$v_{B2a} = \frac{ML}{3EJ} = \frac{\frac{qa^2}{2}(2a)}{3EJ} = \frac{qa^3}{3EJ} =$$

$$= \frac{2,5 \cdot 5^3}{3 \cdot 50} \cdot \underline{\underline{10^{-3}}} = 0,00208 \text{ rad} = 0,12^\circ$$

$$y_{2a} = b \cdot v_{B2a} =$$

$$= 4 \cdot 0,00208 \cdot 10^3 = 10,4 \text{ mm}$$



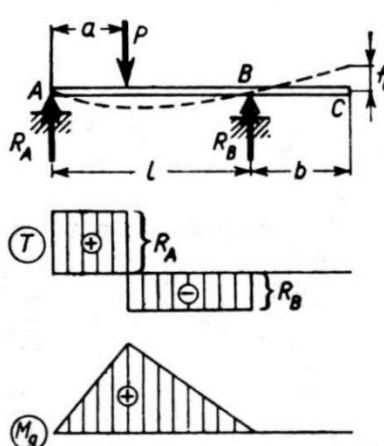
2b. Odształcenie wspornika BC

$$v_{B2b} = \frac{qb^3}{6EJ} = \frac{2,5 \cdot 4^3}{6 \cdot 50} \cdot \underline{\underline{10^{-3}}} = 0,00053 \text{ rad} = 0,03^\circ$$

$$y_{2b} = \frac{qb^4}{8EJ} = \frac{2,5 \cdot 4^4}{8 \cdot 50} \cdot \underline{\underline{10}} = 16 \text{ mm},$$

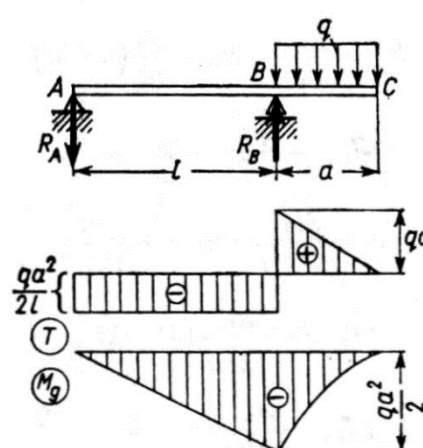
Niezgodziński M. E., Niezgodziński T. (2004). "Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe". Wydawnictwo Naukowo-Techniczne Warszawa 2004



Lp.	Sposób obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gących	Reakcje, M_{\max} , szczególne wartości kątów obrotu i strzałek ugięcia
16		$\theta_C = \theta_B = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6lEJ},$ $f_C = \theta_B b \frac{Pab(l^2 - a^2)}{6lEJ},$ <p>dla $a = \frac{1}{2}l$ $\theta_C = \theta_B = \frac{Pl^2}{16EJ},$</p> $f_C = \frac{Pl^2b}{16EJ}$

Niezgodziński M. E., Niezgodziński T. (2004). "Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe". Wydawnictwo Naukowo-Techniczne Warszawa 2004



Lp.	Sposób obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gących	Reakcje, M_{\max} , szczególne wartości kątów obrotu i strzałek ugięcia
12		$R_A = \frac{qa^2}{2l}, \quad R_B = \frac{qa}{2l}(2l+a),$ $M_{\max} = \frac{qa^2}{2} \quad \text{dla } x = l,$ $\theta_A = \frac{1}{12} \frac{qla^2}{EJ}, \quad \theta_B = -\frac{1}{6} \frac{qla^2}{EJ},$ $\theta_C = -\frac{1}{6} \frac{qa^2}{EJ}(l+a),$ $f_C = \frac{1}{24} \frac{qa^3}{EJ}(4l+3a),$ $f_{\max} = \frac{ql^2a^2}{18\sqrt{3}EJ} \quad \text{dla } x = \frac{l}{\sqrt{3}}$

Całkowite ugięcie (przesunięcie) końca C:

$$y_C = y_1 + y_{2a} + y_{2b} = -20,0 + 8,32 + 16 = 4,32\text{mm}$$

Kąt obrotu przekroju belki na podporze B:

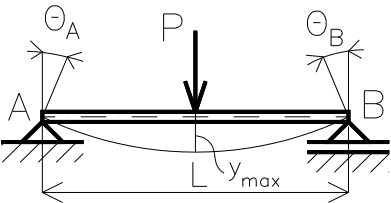
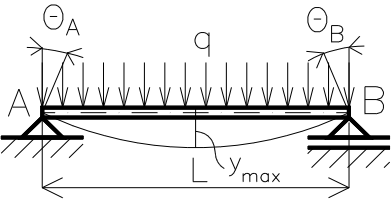
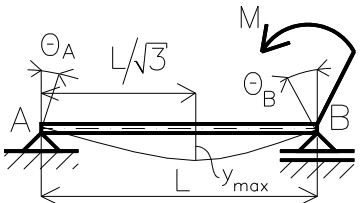
$$\Theta_B = \Theta_{B1} + \Theta_{B2a} = (-0,29^\circ + 0,12^\circ) = -0,17^\circ$$

Kąt obrotu przekroju belki na końcu w przekroju C:

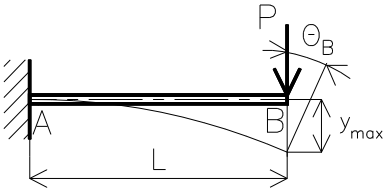
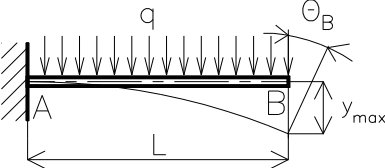
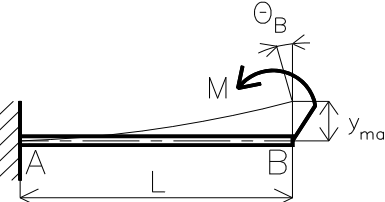
$$\Theta_C = \Theta_{B1} + \Theta_{B2a} + \Theta_{B2b} = \Theta_B + \Theta_{B2b} = -0,17^\circ + 0,03^\circ = -0,14^\circ$$

Źródło: Prof. M.Ostwald (E-Skrypt)

Przemieszczenia prostych belek

Belka	Kąt obrotu	Przemieszczenie
	$\Theta_A = \frac{PL^2}{16EJ}$ $\Theta_B = -\frac{PL^2}{16EJ}$	$y_{\max} = \frac{PL^3}{48EJ}$ <p>dla $x = L/2$</p>
	$\Theta_A = \frac{qL^3}{24EJ}$ $\Theta_B = -\frac{qL^3}{24EJ}$	$y_{\max} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EJ}$ <p>dla $x = L/2$</p>
	$\Theta_A = \frac{ML}{6EJ}$ $\Theta_B = -\frac{ML}{3EJ}$	$y_{x=\frac{1}{2}L} = \frac{ML^2}{16EJ}$ $y_{\max} = \frac{ML^2}{9\sqrt{3}EJ}$

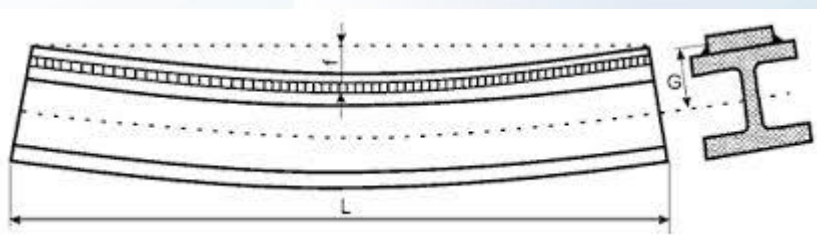
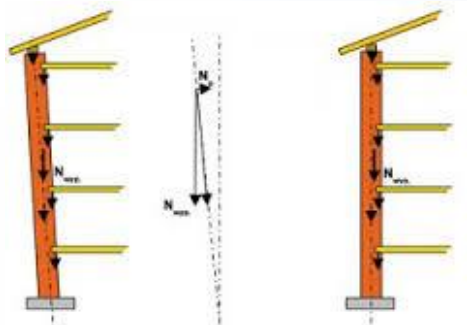
Przemieszczenia prostych belek

Belka	Kąt obrotu	Przemieszczenie
	$\Theta_B = \frac{PL^2}{2EJ}$	$y_B = \frac{PL^3}{3EJ}$
	$\Theta_B = \frac{qL^3}{6EJ}$	$y_B = \frac{qL^4}{8EJ}$
	$\Theta_B = -\frac{ML}{EJ}$	$y_B = -\frac{ML^2}{2EJ}$

Źródło: Prof. M.Ostwald (E-Skrypt)



POLITECHNIKA POZNAŃSKA



DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ
Zapraszam ponownie 😊