



POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wykład NR4 v. 6.0

ZŁOŻONY STAN OBCIĄŻENIA

dr hab. inż. Piotr PACZOS

**Politechnika Poznańska,
Instytut Mechaniki Stosowanej,
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji**

Przypadki wytrzymałości złożonej

W praktyce inżynierskiej najczęściej spotyka się złożone przypadki obciążeń konstrukcji.

Do prawidłowego rozwiązywania tych zagadnień konieczna jest znajomość wcześniej omówionych prostych przypadków, takich jak: rozciąganie, skręcanie i zginanie, a w szczególności rozkładów naprężeń powstających pod wpływem tych obciążeń.

Konieczna jest też znajomość hipotez wytrzymałościowych, niezbędnych do sformułowania warunku wytrzymałościowego, uwzględniającego różnego typu naprężenia, (normalne i styczne), działające w jednym punkcie.

NAJCZĘŚCIEJ SPOTYKANE PRZYPADKI:

- zginanie ukośne,
- zginanie połączone z rozciąganiem (lub ściskaniem),
- zginanie połączone ze skręcaniem,
- ogólny przypadek wytrzymałości złożonej, a więc połączenie rozciągania, skręcania i zginania.



ZŁOŻONY STAN OBCIĄŻENIA

W praktycznych obliczeniach wytrzymałościowych często pomija się wpływ obciążeń **poprzecznych**, a omówienie wpływu sił poprzecznych na wytrzymałość zginanych belek ogranicza się do najważniejszych przypadków.

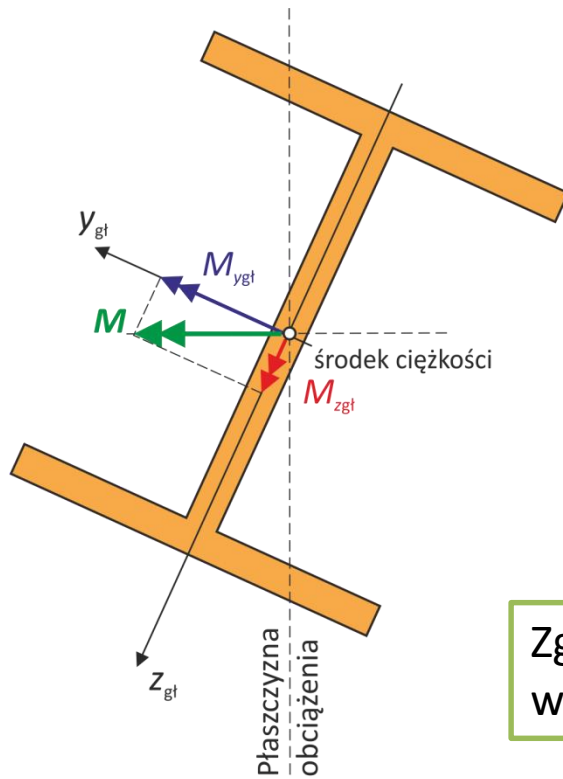
Podstawowym zagadnieniem w obliczeniach wytrzymałościowych konstrukcji lub ich elementów, poddanych obciążeniu złożonemu, jest **identyfikacja obciążeń**.

Identyfikacja polega na wykorzystaniu **praw statyki** do określenia sił i momentów działających na **konstrukcję** lub jej fragment, pochodzących od obciążeń zewnętrznych.

Szerokie zastosowanie znajdują tutaj tzw. **zerowe układy sił**, pozwalające na określenie sił wewnętrznych w poszczególnych częściach konstrukcji.

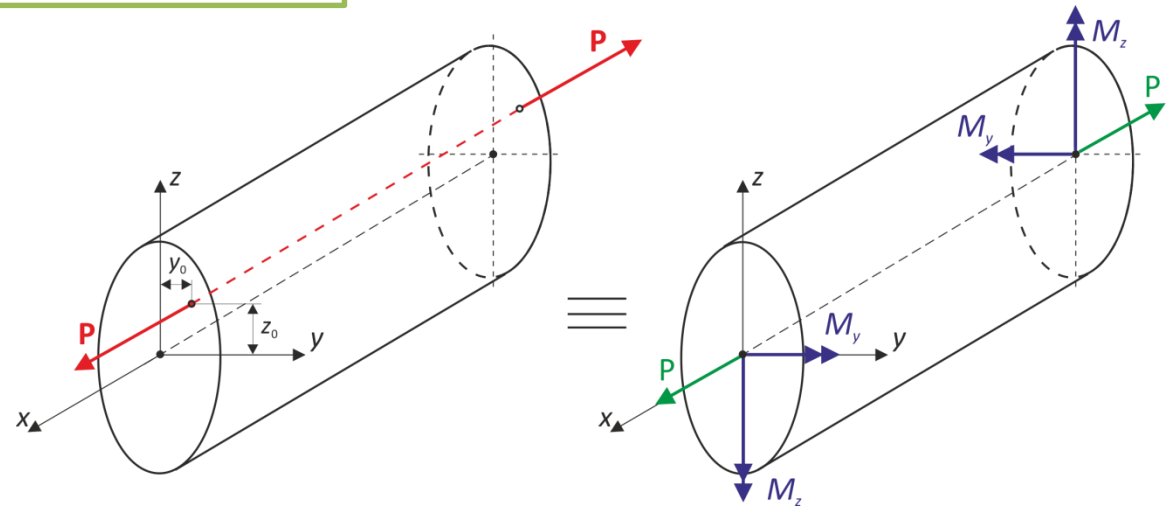
Zginanie ukośne

Zginanie ukośne (zginanie złożone) jest bezpośrednio związane ze zginaniem prostym. Występuje wówczas, gdy wektor momentu zginającego belkę nie pokrywa się z kierunkiem żadnej z osi symetrii.



Zginanie ukośne można traktować jako sumę zginania prostego w płaszczyźnie pionowej oraz w płaszczyźnie poziomej.

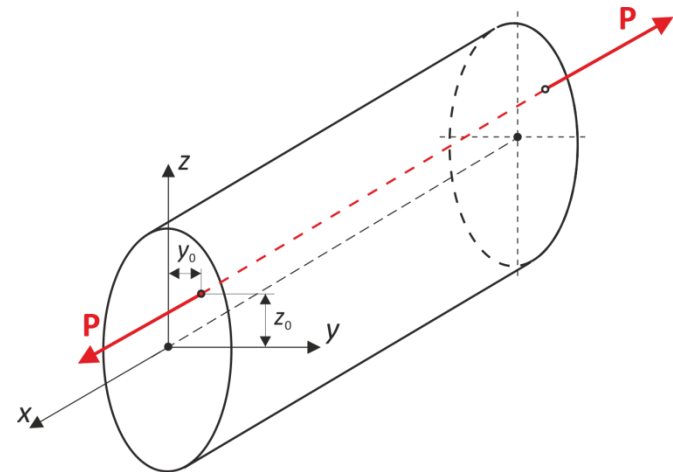
Mimośrodkowe rozciąganie pręta



Siła normalna jest równa P , a odpowiednie momenty gnące: $M_y = P \cdot z_0$ $M_z = P \cdot y_0$

Jest to przypadek mimośrodkowego rozciągania pręta dla którego naprężenie w dowolnym punkcie można wyznaczyć ze wzoru:

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_{gy} + \sigma_{gz} = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{M_y}{J_y} z \pm \frac{M_z}{J_z} y$$



y_0, z_0 – współrzędne punktu położenia siły P
 i_y, i_z – promienie bezwładności

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}$$

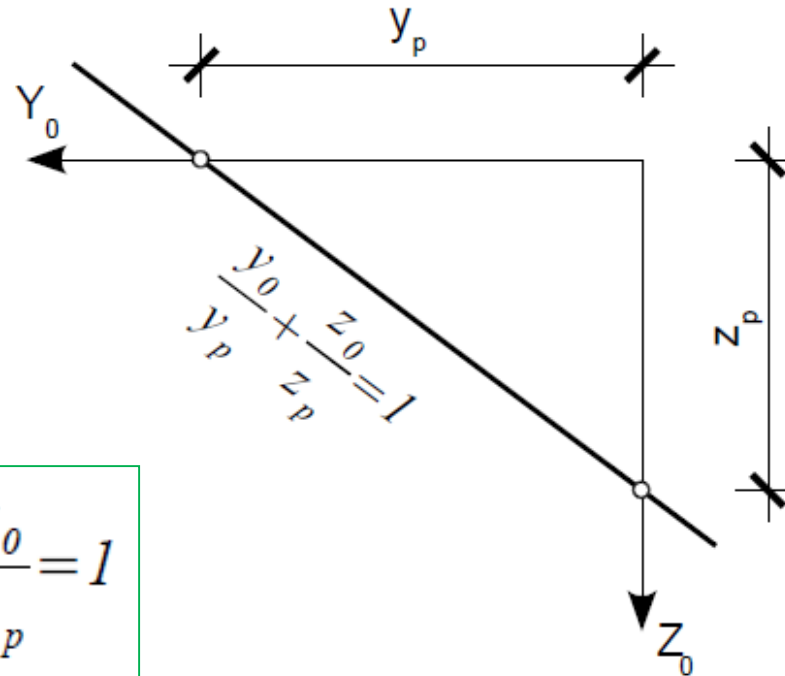
Równanie osi obojętnej dla naprężenia równego zero ma postać:

$$\frac{y}{a_y} + \frac{z}{a_z} = 1$$

gdzie: a_y i a_z są miejscami przecięcia osi y i z

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_0}, \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_0}$$

Równanie osi obojętnej



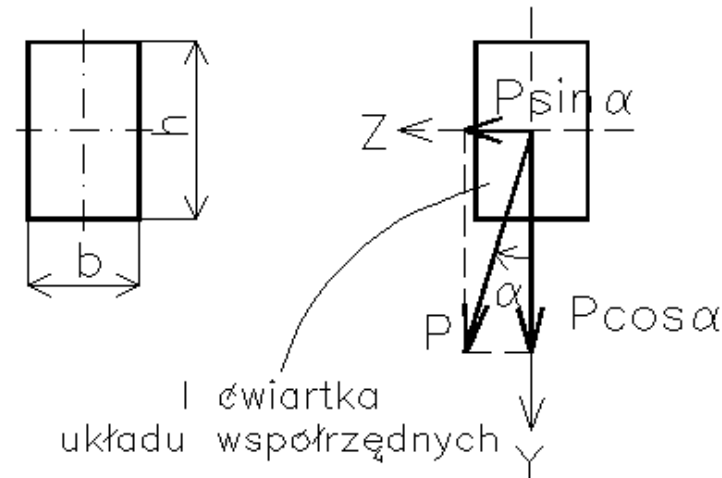
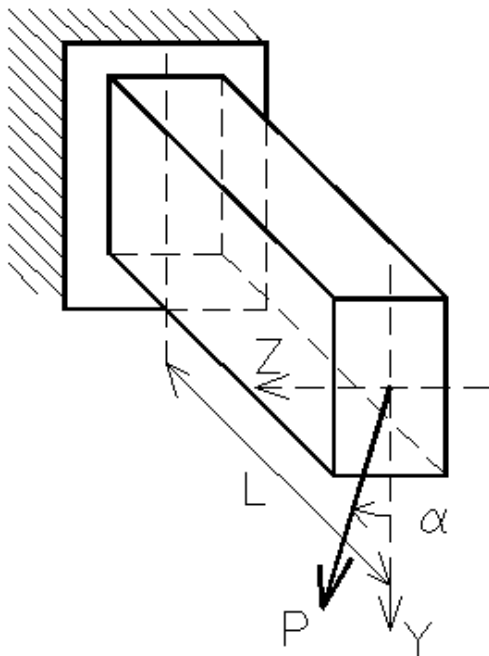
Odcinkowa postać prostej

$$\frac{y_0}{y_p} + \frac{z_0}{z_p} = 1$$

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_{gy} + \sigma_{gz} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_0}{i_z^2} y + \frac{z_0}{i_y^2} z \right)$$

Przykład 1

Belka wspornikowa o długości $L = 1$ m, przekroju prostokątnym o wymiarach $b = 3$ cm, $h = 5$ cm jest obciążona na końcu siłą skupioną $P = 1$ kN, odchyloną od pionu o kąt $= 20^\circ$. Wyznaczyć naprężenia, położenie osi obojętnej oraz ugięcie belki. Przyjąć $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.





Maksymalny moment zginający występuje w utwierdzeniu:

$$M = PL = 1 \cdot 1 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Siłę P , przyłożoną do swobodnego końca belki, rozkłada się na składową pionową i poziomą. Momenty zginające wywołane tymi składowymi wynoszą:

$$M_Y = PL \sin \alpha = 1 \cdot 1 \cdot \sin 20^\circ = 0,342 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_Z = PL \cos \alpha = 1 \cdot 1 \cdot \cos 20^\circ = 0,940 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Momenty bezwładności oraz wskaźniki wytrzymałości na zginanie wynoszą odpowiednio:

$$J_Z = \frac{bh^3}{12} = \frac{3 \cdot 5^3}{12} = 31,25 \text{ cm}^4, \quad W_Z = \frac{bh^2}{6} = \frac{3 \cdot 5^2}{6} = 12,5 \text{ cm}^3,$$

$$J_Y = \frac{hb^3}{12} = \frac{5 \cdot 3^3}{12} = 11,25 \text{ cm}^4, \quad W_Y = \frac{hb^2}{6} = \frac{5 \cdot 3^2}{6} = 7,5 \text{ cm}^3.$$

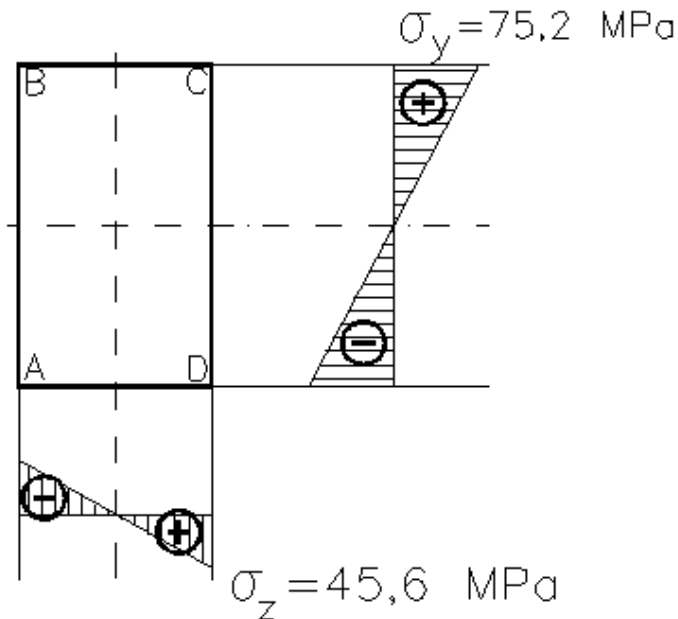
Maksymalne naprężenia zginające w płaszczyźnie pionowej:

$$\sigma_{gy} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{0,940}{12,3} \underline{\underline{10^3}} = 75,2 \text{ MPa}$$

w płaszczyźnie poziomej:

$$\sigma_{gz} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{0,342}{7,5} \underline{\underline{10^3}} = 45,6 \text{ MPa}$$

Rozkłady naprężeń normalnych



Po zsumowaniu naprężeń z uwzględnieniu ich znaków w punktach A, B, C i D, znajdujących się w narożach przekroju, otrzymuje się naprężenia wypadkowe:

$$\sigma_A = -75,2 - 45,6 = -120,8 \text{ MPa},$$

$$\sigma_B = 75,2 - 45,6 = 29,6 \text{ MPa},$$

$$\sigma_C = 75,2 + 45,6 = 120,8 \text{ MPa},$$

$$\sigma_D = -75,2 + 45,6 = -29,6 \text{ MPa}.$$

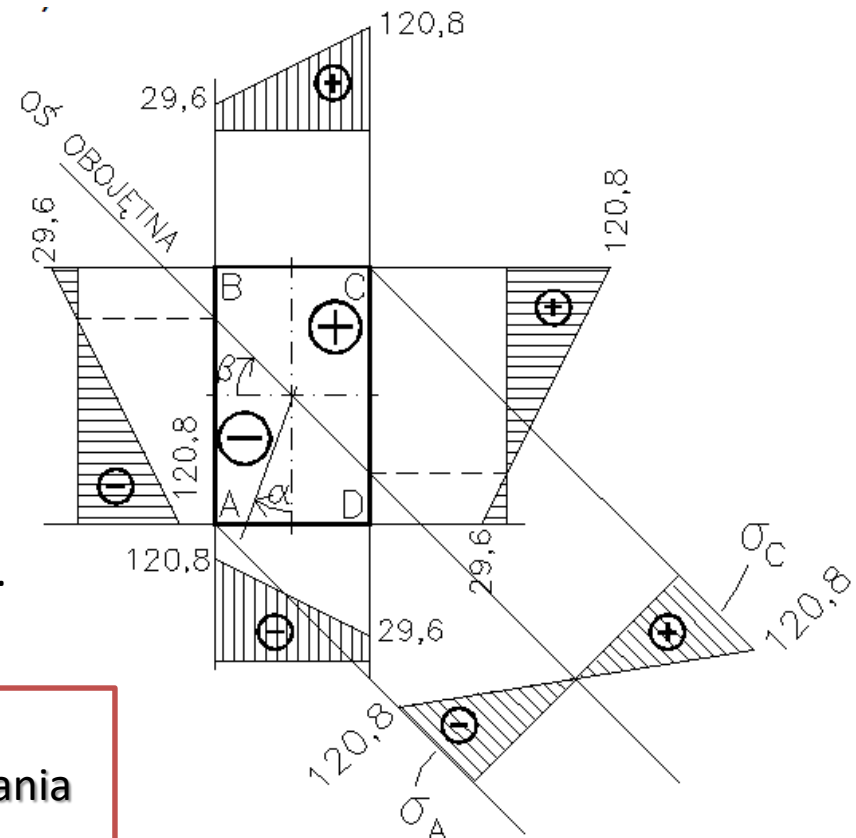
Wykres naprężeń normalnych wzdłuż krawędzi konturu przekroju poprzecznego:

Widać na nim, że na krawędziach w dwóch punktach naprężenia są równe zero.

Na rysunku przedstawiono również rozkład naprężeń wzdłuż linii prostopadłej do osi obojętnej.

Po zrzutowaniu tych punktów na krawędzie otrzymuje się położenie osi obojętnej, dzielącej przekrój na część rozciąganą „+” oraz ściskaną „-”.

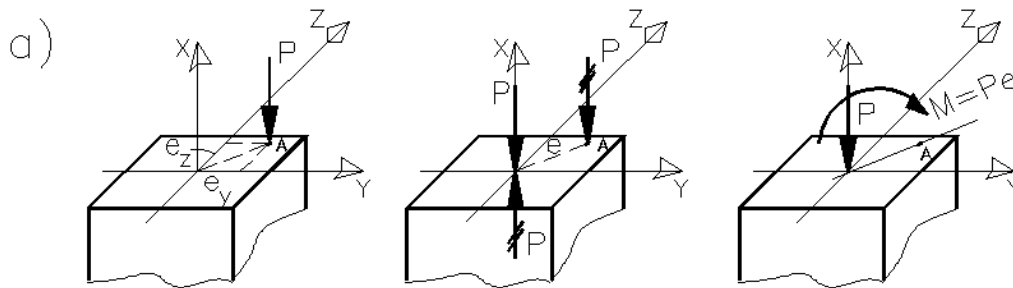
Przedstawione wyżej rozwiązanie stanowi naturalne wykorzystanie superpozycji zginania w dwóch prostopadłych płaszczyznach.



4.1. Zginanie z rozciąganiem lub ściskaniem

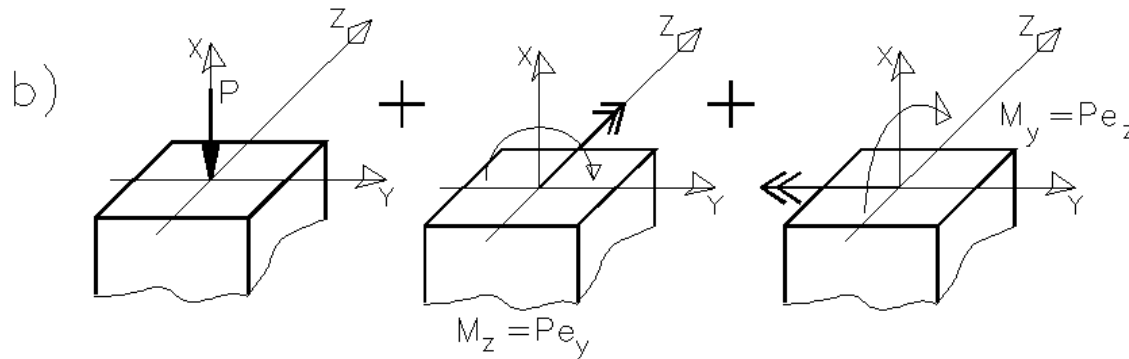
Wspólne działanie sił rozciągających (ściskających) oraz momentu zginającego występuje najczęściej przy mimośrodowym obciążeniu pręta. Mimośrodowość może być wywołana przyłożeniem sił poza środkiem ciężkości, wykrzywieniem osi pręta lub równocześnie dwoma tymi czynnikami.

Obciążenie pręta siłą skupioną przyłożoną w punkcie $A(e_y, e_z)$, przesuniętym względem środka ciężkości przekroju o odległość e .



Po przyłożeniu w środku ciężkości dwóch sił $(P, -P)$, tworzących układ sił zerowych (zrównoważony układ sił), można łatwo zidentyfikować parę sił tworzącą moment zginający, $M = P \cdot e$, oraz niezrównoważoną siłę ściskającą P , przyłożoną w środku ciężkości.

Poniższy rysunek pokazuje superpozycję obciążeń: ściskanie pręta siłą P przyłożoną w środku ciężkości przekroju, momentem zginającym M_Z oraz momentem zginającym M_Y .

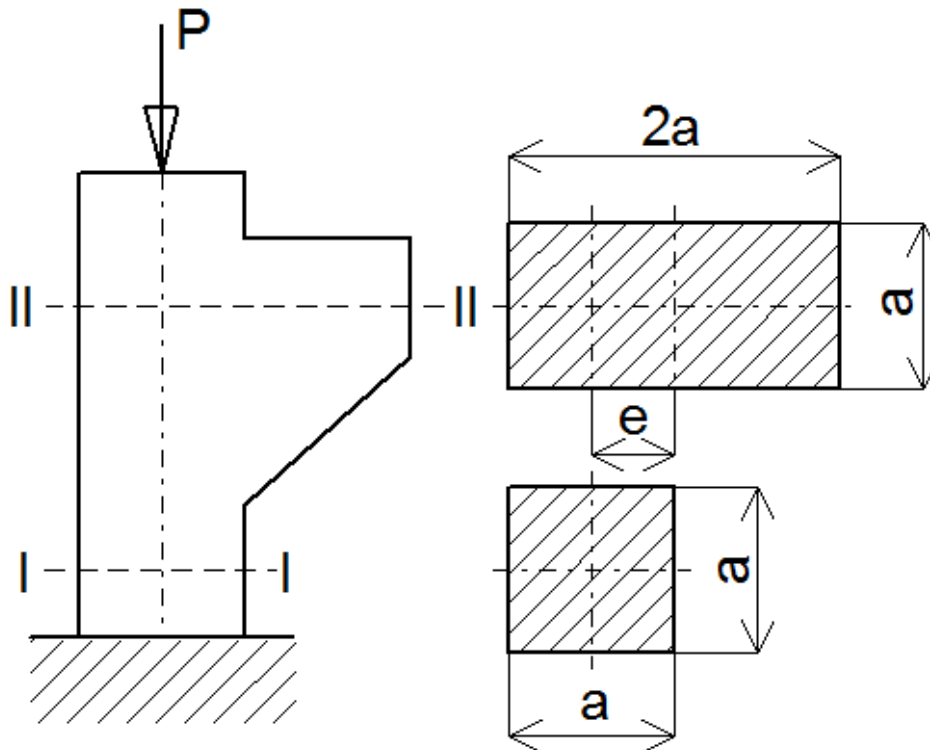


Z wzorów na sumowanie naprężeń oblicza się naprężenia w dowolnym punkcie przekroju:

$$\sigma = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{M_Z}{J_Z} y \pm \frac{M_Y}{J_Y} z$$

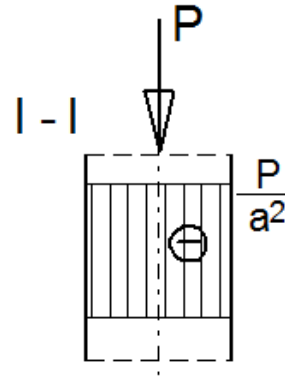
Przykład 2

Obliczyć naprężenia w osiowo ściskanej kolumnie. Porównać naprężenia w przekrojach I-I oraz II-II.



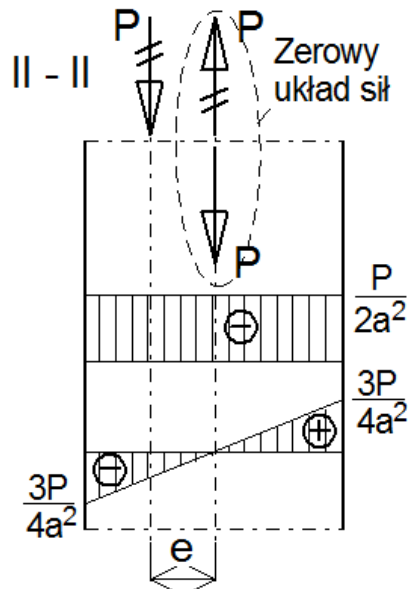
Kolumna składa się z części o powierzchni a^2 (przekrój I-I) oraz z części o powierzchni $2a^2$ (przekrój II-II).

W przekroju I-I występują naprężenia ściskające od siły osiowej P :



$$\sigma_{IP} = \frac{P}{a^2}$$

Przekrój II-II jest obciążony mimośrodowo w stosunku do osi działania siły P :

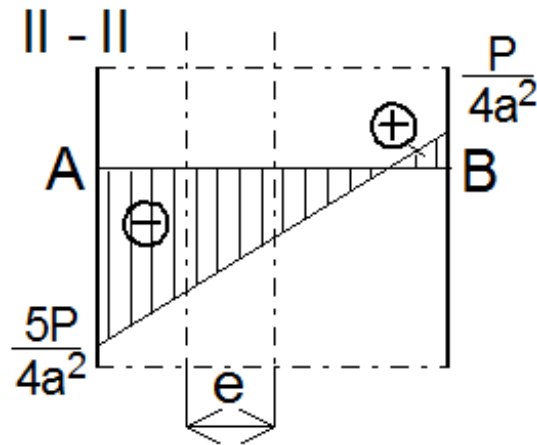


Zerowy układ sił pokazuje działanie siły osiowej P oraz momentu zginającego $M = P \cdot e$, $e = 0,5a$. Naprężenia normalne od siły osiowej P wynoszą:

$$\sigma_{IIP} = \frac{P}{2a^2}$$

Od momentu zginającego:

$$\sigma_{IIM} = \frac{M}{W} = \frac{P \cdot e}{\frac{a \cdot (2a)^2}{6}} = \frac{6P \cdot \frac{a}{2}}{4a^3} = \frac{3P}{4a^2}$$



Wypadkowe naprężenia normalne w przekroju II-II wynoszą:

1. Naprężenia ściskające w punkcie A:

$$\sigma_{II} = \sigma_{II}^A = -\sigma_{IIP}^A - \sigma_{IIM}^A = -\frac{5P}{4a^2}$$

2. Naprężenia rozciągające w punkcie B:

$$\sigma_{II}^B = -\sigma_{IIP}^B + \sigma_{IIM}^B = \frac{P}{4a^2}$$

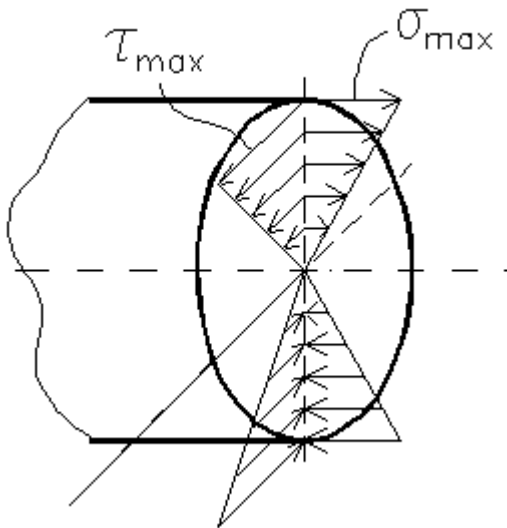
Porównując maksymalne naprężenia normalne w przekrojach I-I oraz II-II otrzymuje się

$$\frac{\sigma_{II}}{\sigma_I} = \frac{5}{4}$$

Działanie momentu zginającego powoduje, że w przekroju II-II o powierzchni $2a^2$ naprężenia są większe niż w przekroju I-I o powierzchni a^2 .

4.2. Zginanie ze skręcaniem

Wspólne działanie zginania i skręcania jest najczęściej spotykanym przypadkiem wytrzymałości złożonej. W ten sposób są obciążone wały maszyn, pojazdów, skrzyni biegów itp.



Ten rodzaj wytrzymałości złożonej charakteryzuje się niejednorodnym rozkładem naprężeń – moment zginający powoduje powstanie naprężeń normalnych, moment skręcający naprężeń stycznych (rysunek).

Naprężenia normalne w wałach o przekroju kołowym: (**ZGINANIE**):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{zg}}{W}, \quad W = \frac{\pi d^3}{32},$$

Naprężenia styczne: (**SKRĘCANIE**): $\tau_{\max} = \frac{M_{skr}}{W_0}, \quad W_0 = 2 \cdot W = \frac{\pi d^3}{16}$

Wskaźnik wytrzymałości przekroju kołowego na skręcanie jest równy podwójnemu wskaźnikowi wytrzymałości przekroju na zginanie.

Naprężenia zredukowane oblicza się według hipotezy Hubera

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\tau_{max}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{zg}}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{skr}}{W_0}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{zg}^2 + 0,75M_{skr}^2}}{W}$$

Dla uproszczenia zapisu wprowadza się często pojęcie **momentu zredukowanego**

$$M_{red} = \sqrt{M_{zg}^2 + 0,75M_{skr}^2}$$



W przypadku zginania w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach oblicza się wypadkowy moment zginający

$$M_{zg} = \sqrt{M_Y^2 + M_Z^2}$$

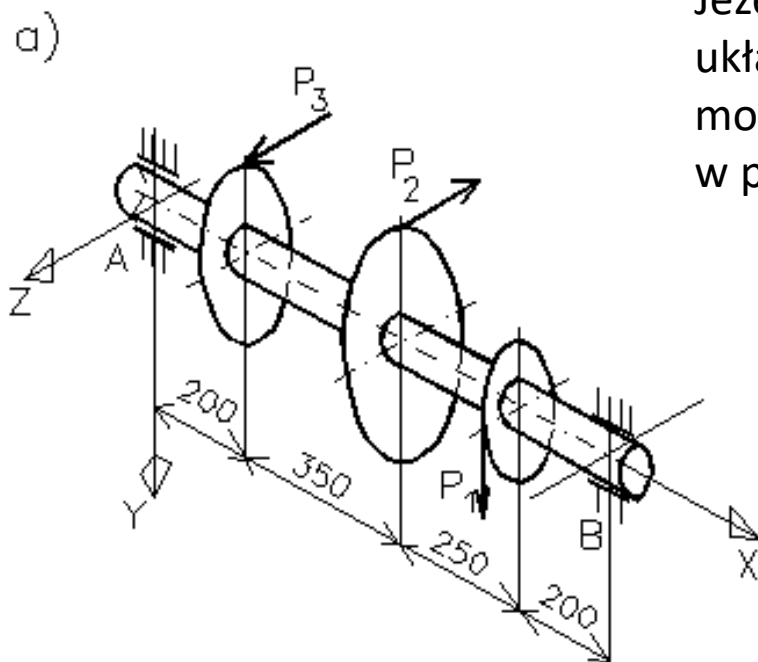
Warunek wytrzymałościowy przy zginaniu i skręcaniu

$$\sigma_{red} = \frac{M_{red}}{W} \leq \sigma_{dop}$$

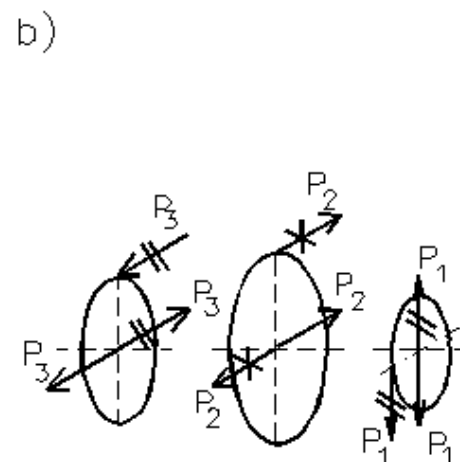
gdzie W – wskaźnik wytrzymałości przekroju na zginanie.

Przykład 3

Na wale o kołowym przekroju zamontowano trzy koła zębate o średnicach $d_1 = 100 \text{ mm}$, $d_2 = 300 \text{ mm}$, $d_3 = 250 \text{ mm}$ (rysunek). Koła te współpracują z innymi kołami, przenosząc siły obwodowe $P_1 = 4000 \text{ N}$, $P_2 = 3000 \text{ N}$, $P_3 = 2000 \text{ N}$. Przyjmując naprężenia dopuszczalne $\sigma_{\text{dop}} = 100 \text{ MPa}$, określić z warunku wytrzymałościowego średnicę wału d .



Jeżeli w osi wału będą przyłożone zerowe układy sił P_i (rys. b), to można zidentyfikować momenty skręcające oraz siły zginające wał w płaszczyźnie pionowej i poziomej.



Dla koła 1 moment skręcający

$$M_1 = P_1 d_1 / 2 = 200 \text{ Nm},$$

pionowa siła zginająca wał

$$P_1 = 4000 \text{ N}.$$

Dla koła 2 $M_2 = P_2 d_2 / 2 = 450 \text{ Nm}$,

pozioma siła zginająca

$$P_2 = 3000 \text{ N},$$

dla koła 3

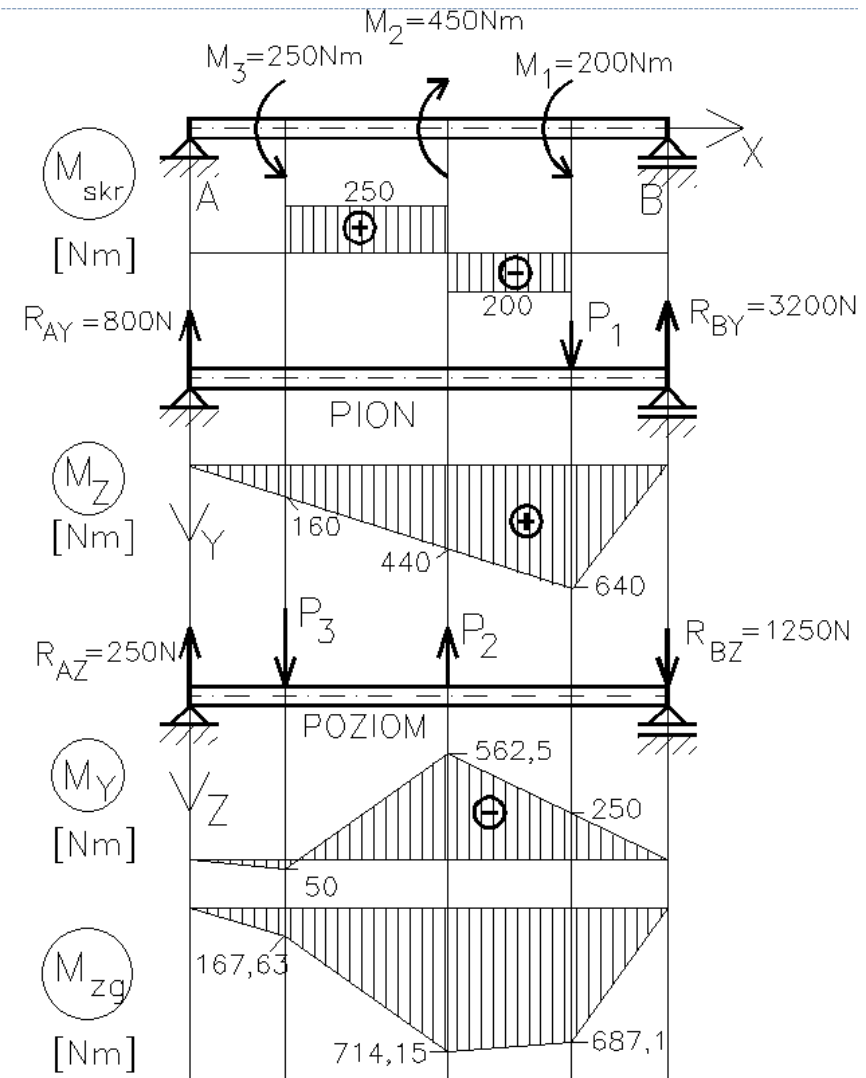
$$M_3 = P_3 d_3 / 2 = 250 \text{ Nm},$$

pozioma siła zginająca

(skierowana przeciwnie do P_2)

$$P_3 = 2000 \text{ N}.$$

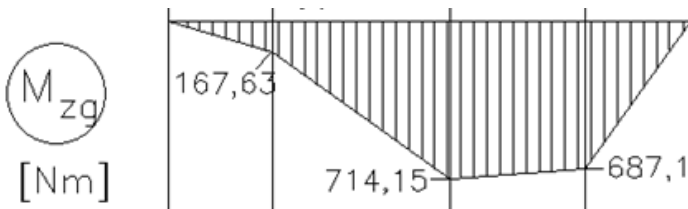
Wał AB oraz belkę AB zginaną w płaszczyźnie pionowej oraz w płaszczyźnie poziomej, jak również odpowiadające im wykresy momentów pokazano na rysunku obok.



Z wykresów M_z oraz M_y można określić maksymalne wartości momentów zginających oraz wypadkowe momenty M_{zg} dla przekrojów wałów pod kołami.

Otrzymane wartości pozwalają na wykonanie wykresu M_{zg} dla charakterystycznych punktów – w tym zadaniu są to przekroje, w których są umieszczone koła.

Dla przekroju, w którym występuje maksymalna wartość M_{zg} , moment skręcający $M_s = 250 \text{ N}\cdot\text{m}$.



$$M_{zg}^{(1)} = \sqrt{640^2 + 250^2} = 687,1 \text{ N}\cdot\text{m},$$

$$M_{zg}^{(2)} = \sqrt{440^2 + 562,5^2} = 714,15 \text{ N}\cdot\text{m},$$

$$M_{zg}^{(3)} = \sqrt{160^2 + 50^2} = 167,63 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Moment zredukowany dla tego przekroju według hipotezy energetycznej ma wartość:

$$M_{red} = \sqrt{714,15^2 + 0,75 \cdot 250^2} = 746,25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Z warunku wytrzymałościowego określa się średnicę wału d:

$$\sigma_{red} = \frac{M_{red}}{W} \leq \sigma_{dop}, \quad W = \frac{\pi d^3}{32}, \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{red}}{\pi \sigma_{dop}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 746,25}{\pi \cdot 100} \underline{\underline{10^3}}} = 42,36 \text{ mm}$$

Średnica wału poddanego działaniu momentu skręcającego i momentu zginającego w przekroju niebezpiecznym musi być równa co najmniej 42,36 mm.

Ogólny przypadek wytrzymałości złożonej

Przeprowadzić obliczenia wytrzymałościowe dla pręta przedstawionego na rysunku:

Dane:

$$P_0 = 400 \text{ kN},$$

$$P_1 = 80 \text{ kN},$$

$$P_2 = 40 \text{ kN},$$

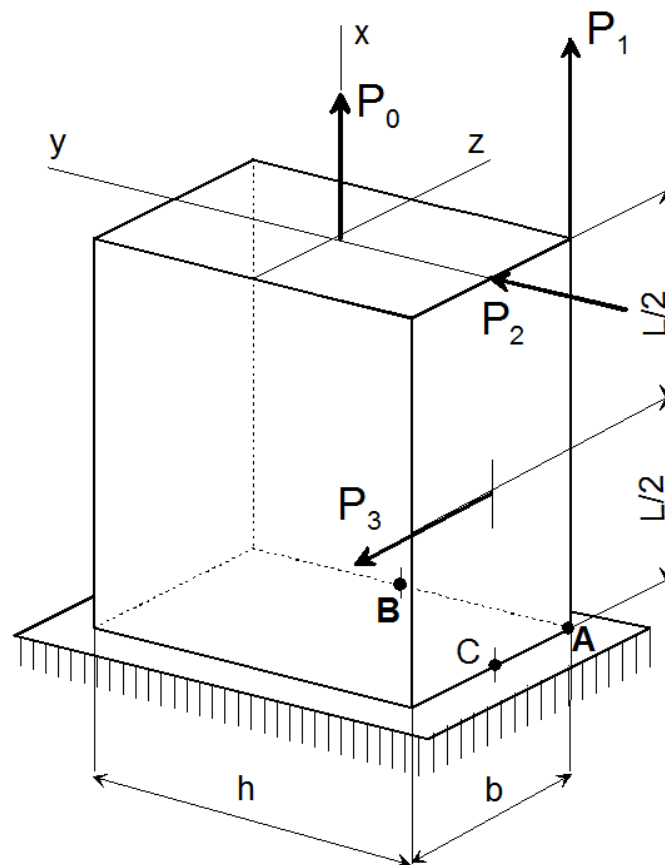
$$P_3 = 20 \text{ kN},$$

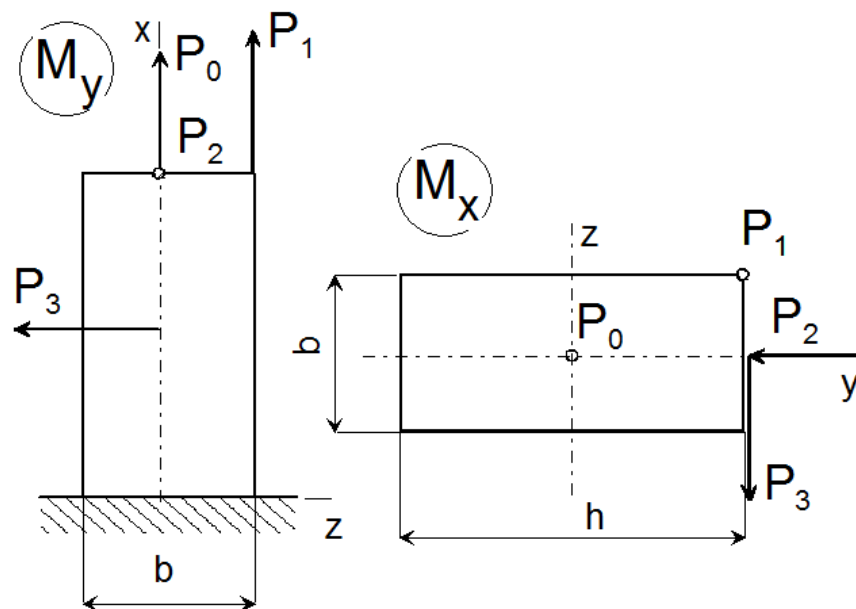
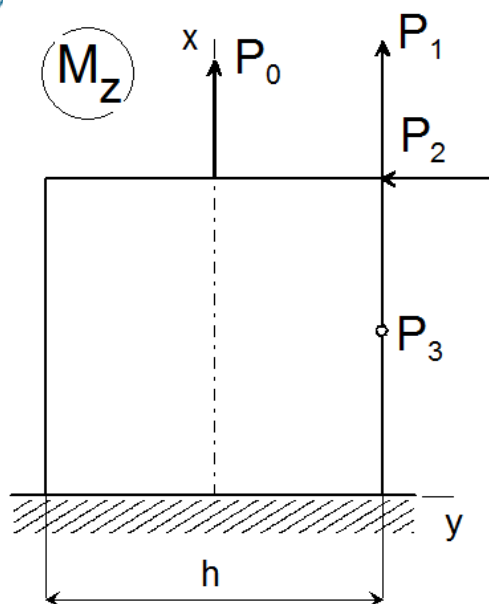
$$L = 1 \text{ m},$$

$$h = 24 \text{ cm},$$

$$b = 8 \text{ cm},$$

$$k_r = 140 \text{ MPa}$$





$$N_x = P_0 + P_1 = 400 + 80 = 480 \text{ kN},$$

$$T_y = P_2 = 40 \text{ kN},$$

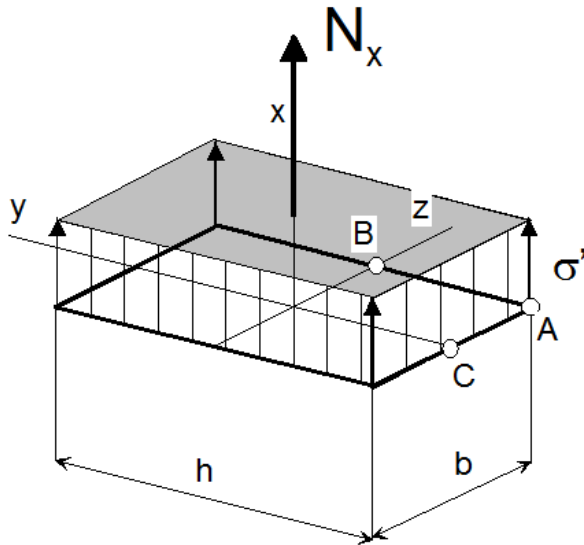
$$T_z = P_3 = 20 \text{ kN}$$

$$M_z = P_1 \cdot \frac{L}{2} + P_2 \cdot L = 80 \cdot \frac{0,24}{2} + 40 \cdot 1,00 = 49,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

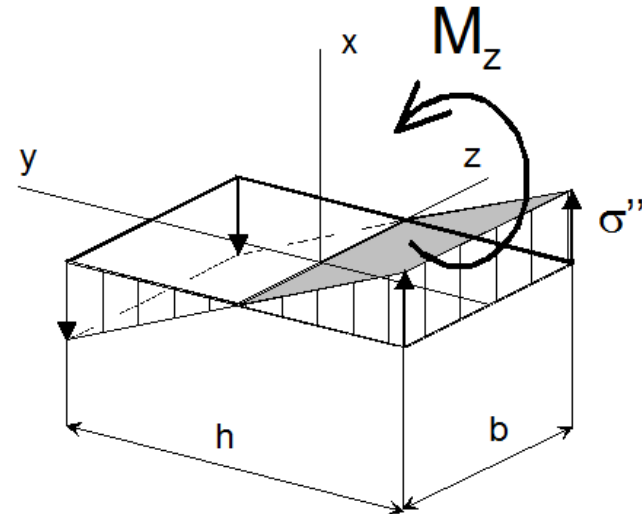
$$M_y = P_1 \cdot \frac{b}{2} + P_3 \cdot \frac{L}{2} = 80 \cdot \frac{0,08}{2} + 20 \cdot \frac{1,00}{2} = 13,2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_x = M_S = P_3 \cdot \frac{h}{2} = 20 \cdot \frac{0,24}{2} = 2,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Wykresy naprężeń normalnych i stycznych

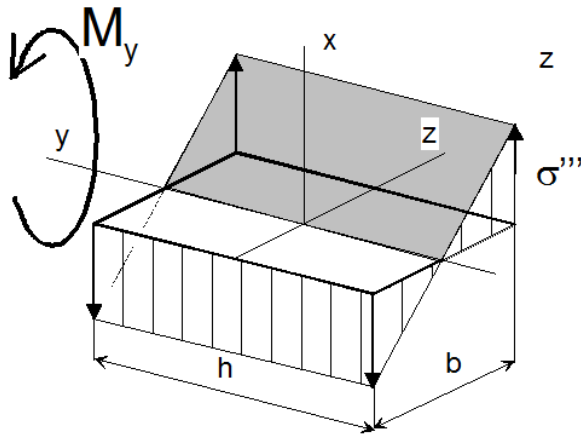


$$\sigma' = \frac{N_x}{b \cdot h} = \frac{480}{8 \cdot 24} \cdot 10 = 25 \text{ MPa}$$



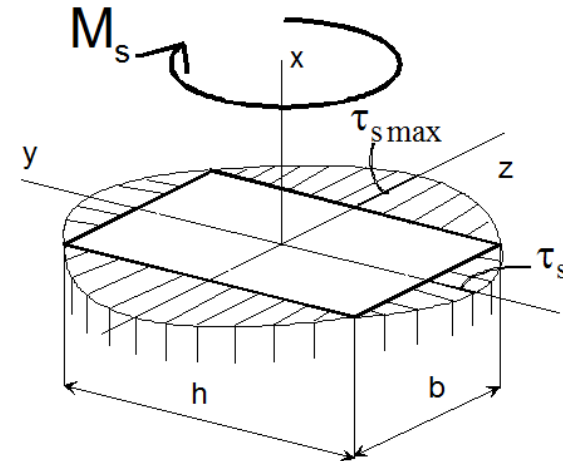
$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$\sigma'' = \frac{6M_z}{b \cdot h^2} = \frac{6 \cdot 49,6}{8 \cdot 24^2} \cdot 10^3 = 64,6 \text{ MPa}$$



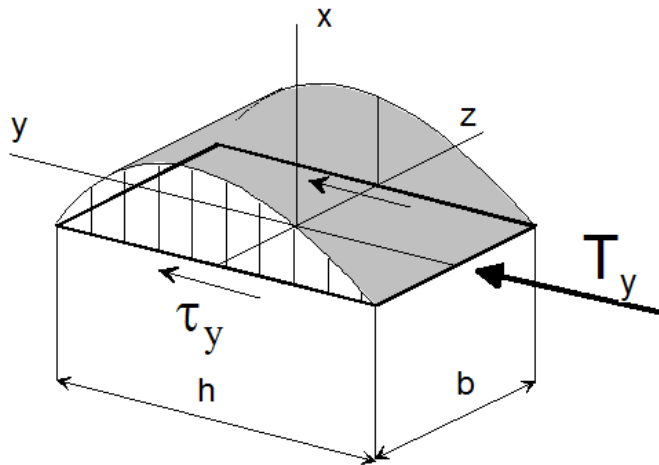
$$W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$$

$$\sigma''' = \frac{6M_y}{h \cdot b^2} = \frac{6 \cdot 13,2}{24 \cdot 8^2} \cdot 10^3 = 51,6 \text{ MPa}$$

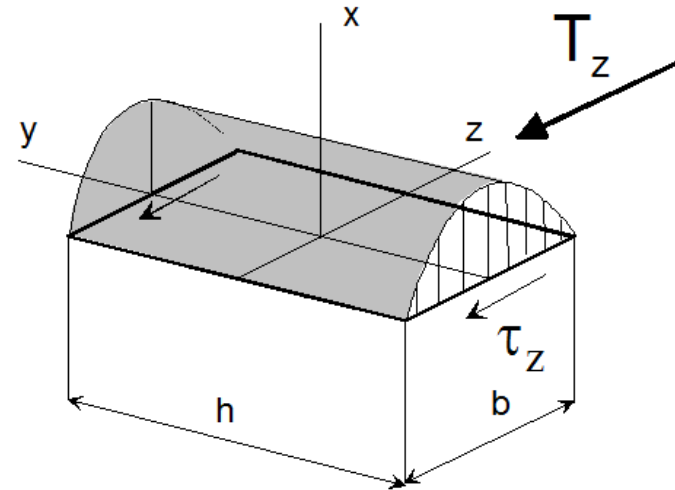


$$\tau_{s\max} = \frac{M_s}{\alpha \cdot h \cdot b^2} = \frac{2,4}{0,267 \cdot 24 \cdot 8^2} \cdot 10^3 = 5,9 \text{ MPa}$$

$$\tau_s = \gamma \cdot \tau_{s\max} = 0,753 \cdot 5,9 = 4,4 \text{ MPa}$$



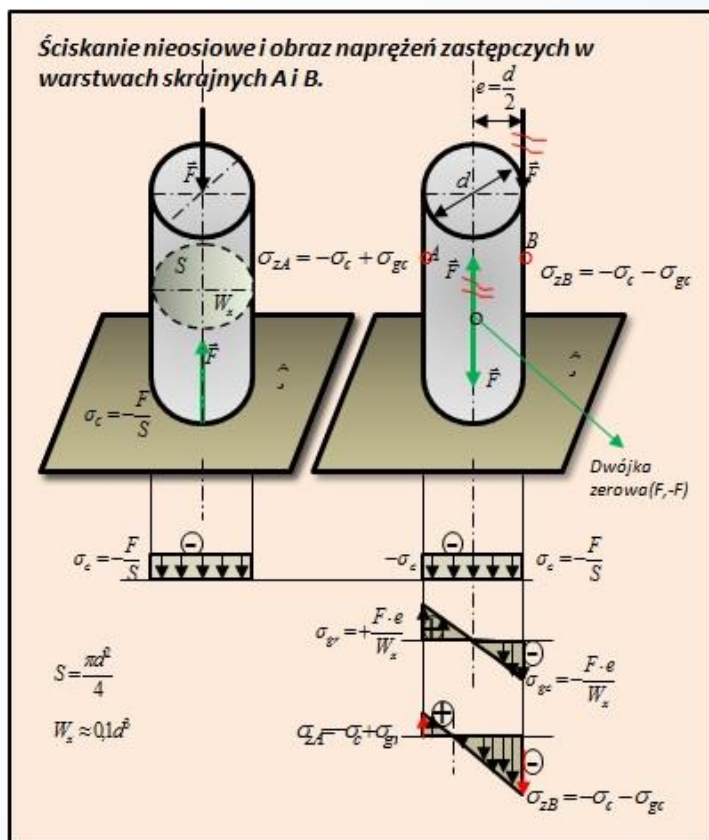
$$\tau_y = \frac{3}{2} \frac{T_y}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \frac{40}{8 \cdot 24} \cdot 10 = 3,1 \text{ MPa}$$



$$\tau_z = \frac{3}{2} \frac{T_z}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \frac{20}{8 \cdot 24} \cdot 10 = 1,6 \text{ MPa}$$



POLITECHNIKA POZNAŃSKA



DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ
Zapraszam ponownie 😊