POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Wykład NR3 v. 6.0

BELKI STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE

dr hab. inż. Piotr PACZOS

Politechnika Poznańska,
Instytut Mechaniki Stosowanej,
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Z belkami statycznie niewyznaczalnymi mamy do czynienia wówczas, gdy liczba reakcji podporowych jest większa od liczby równań równowagi statycznej.

Reakcje nadliczbowe, zwane hiperstatycznymi wyznaczamy z dodatkowych związków uzyskiwanych omawianymi, w tym temacie metodami:

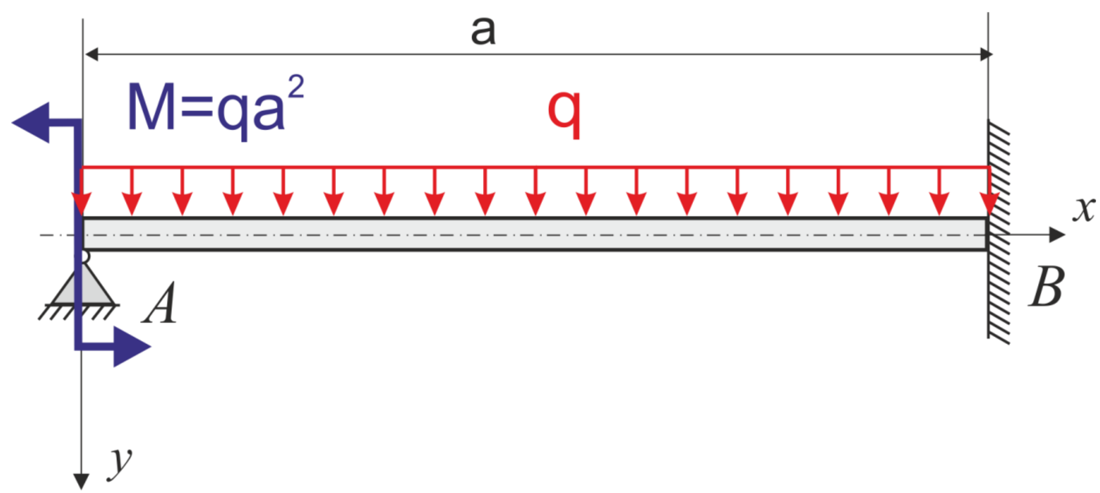
1. Metoda analityczna (bezpośredniego całkowania linii ugięcia belki)
2. Uogólniona metoda analityczna (Metoda Clebscha)
3. Metoda analityczno-graficzna (rzadko stosowana)
4. Równanie 3 momentów
5. Metody energetyczne

Pozostałe elementy analizy wytrzymałościowej belek statycznie niewyznaczalnych, jak: wykresy wewnętrznych sił tnących i momentów gnących czy obliczanie naprężeń normalnych i stycznych pozostają takie same jak dla belek statycznie wyznaczalnych

3.1. Metoda analityczna (metoda bezpośredniego całkowania linii ugięcia belki)

Zadanie 1

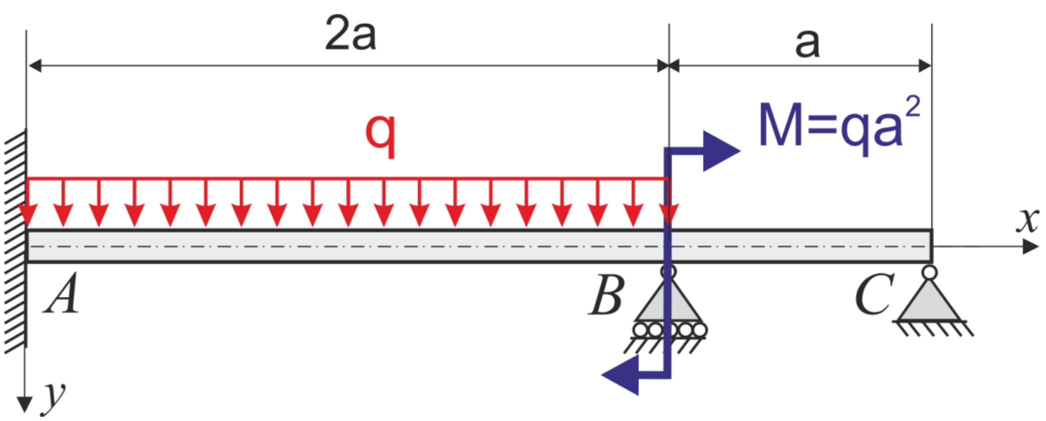
Rozwiązać belkę statycznie niewyznaczalną przedstawioną na rysunku, oraz narysować wykresy sił tnących (**T**) i momentów gnących (**M**)

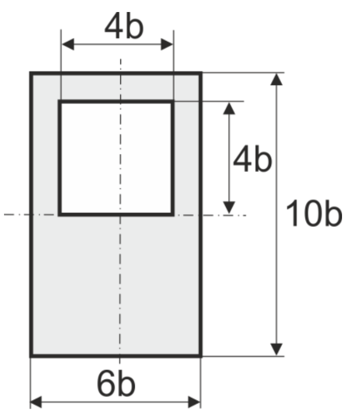


3.2. Uogólniona metoda analityczna (metoda Clebscha)

Zadanie 2

Rozwiązać belkę statycznie niewyznaczalną przedstawioną na rysunku, oraz narysować wykresy wewnętrznych sił tnących (**T**) i momentów gnących (**M**).
Wyznaczyć dopuszczalny wymiar przekroju *b* zginanej belki wiedząc, że maksymalne naprężenia na zginanie wynoszą k_g=200MPa

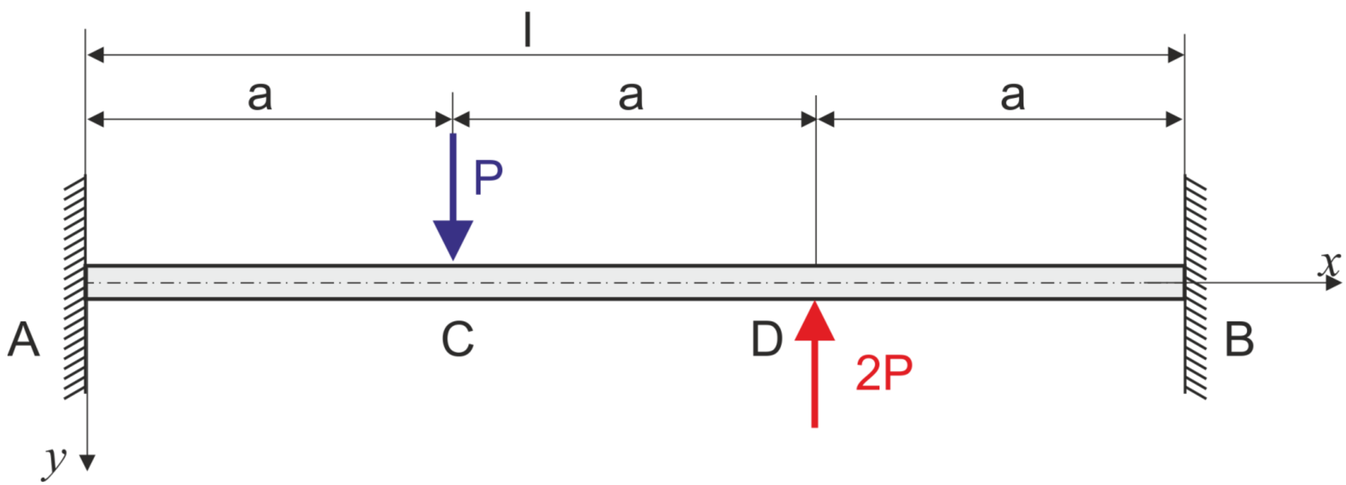




3.3. Metoda analityczno-graficzna (obciążeń wtórnych)

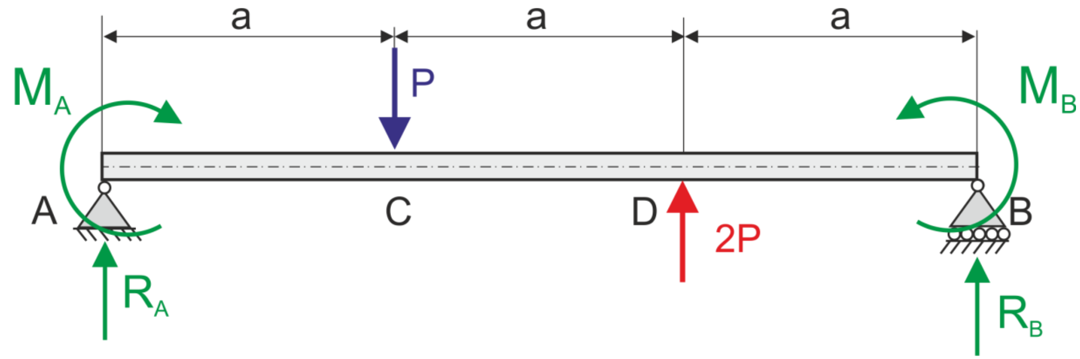
Przykład 1

Rozwiązać belkę statycznie niewyznaczalną przedstawioną na rysunku, oraz narysować wykresy sił tnących (**T**) i momentów gnących (**M**)



Analizę rozpoczynamy od wyboru reakcji nadliczbowych

1. Po usunięciu odpowiednich więzów związanych z reakcjami nadliczbowymi uzyskujemy **układ uwolniony** statycznie wyznaczalny.

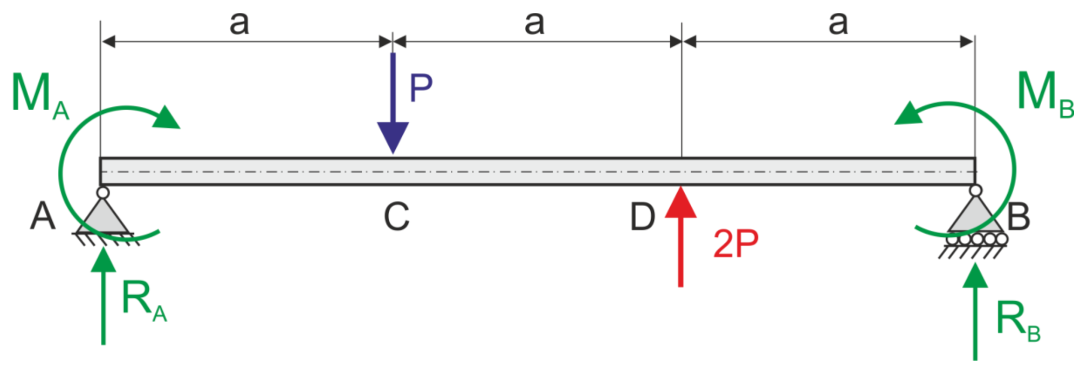


2. Budujemy następnie **belkę fikcyjną**, zwracając uwagę na sposób zamiany podpór.

3. Belkę fikcyjna obciążamy obciążeniem ciągłym o intensywności zgodnej z **polem wykresu momentu gnącego dla belki rzeczywistej**

4. Na koniec stosujemy **wzory na obliczanie kąta obrotu i ugięcia** na podstawie wielkości momentu gnącego i siły tnącej w belce fikcyjnej (wyznaczenie reakcji nadliczbowych)

Uwalniamy układ od więzów:



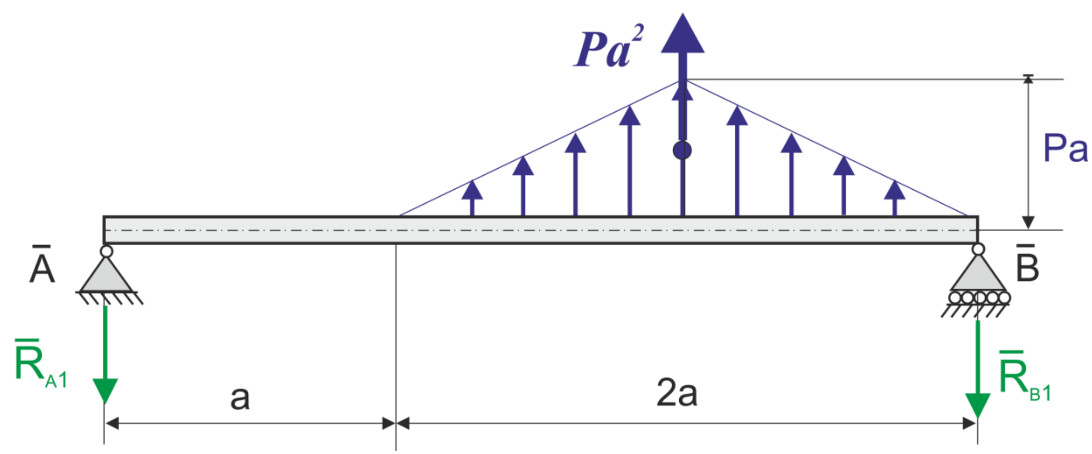
$$(1)\quad \sum F_y = 0$$

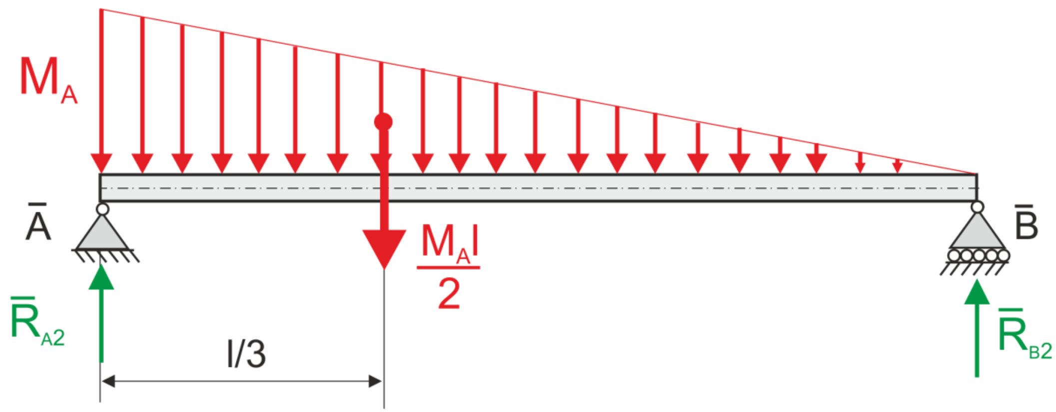
$$(2)\quad \sum M_A = 0$$

4N-2RS=U2NW

$$(3)\quad \theta_A = 0$$

$$(4)\quad \theta_B = 0$$





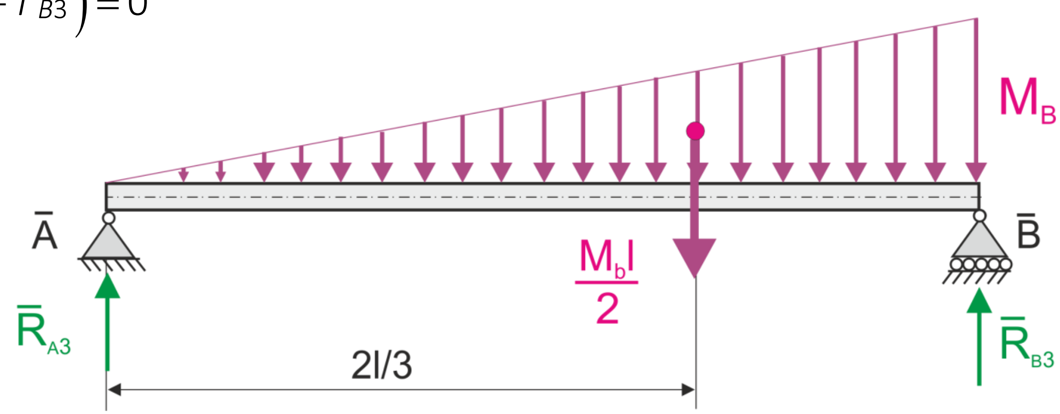
Kąty obrotu na podporze A i B są równe zeru wiec:

$$(3)\quad \theta_A = \theta_{A1} + \theta_{A2} + \theta_{A3} = \frac{1}{EJ}\left(\bar{T}_{A1} + \bar{T}_{A2} + \bar{T}_{A3}\right) = 0$$

$$(4)\quad \theta_B = \theta_{B1} + \theta_{B2} + \theta_{B3} = \frac{1}{EJ}\left(\bar{T}_{B1} + \bar{T}_{B2} + \bar{T}_{B3}\right) = 0$$

$\oplus$ M=> $\bar{q}\downarrow$

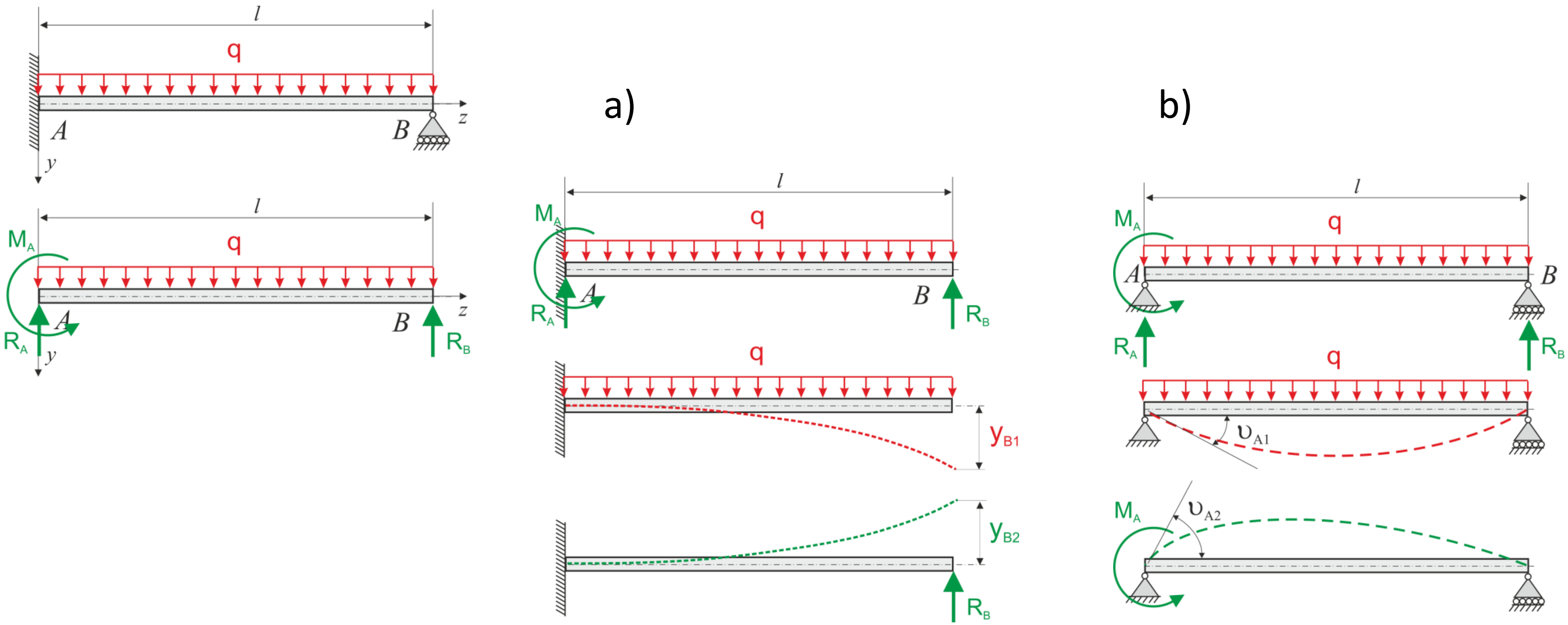
$\ominus$ M=> $\bar{q}\uparrow$



3.4. Metoda porównywania odkształceń

Przykład 1

Dla belki pokazanej na rysunku wyznaczyć reakcje, korzystając z metody superpozycji



Równania równowagi statycznej:

(1) $\sum M_A = 0 \quad -R_B L - M_A + \frac{qL^2}{2} = 0,$ (2) $\sum M_B = 0 \quad -R_A L + M_A + \frac{qL^2}{2} = 0.$

Zdanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne – należy ułożyć jedno równanie geometryczne.

Zadanie rozwiązano dwoma sposobami

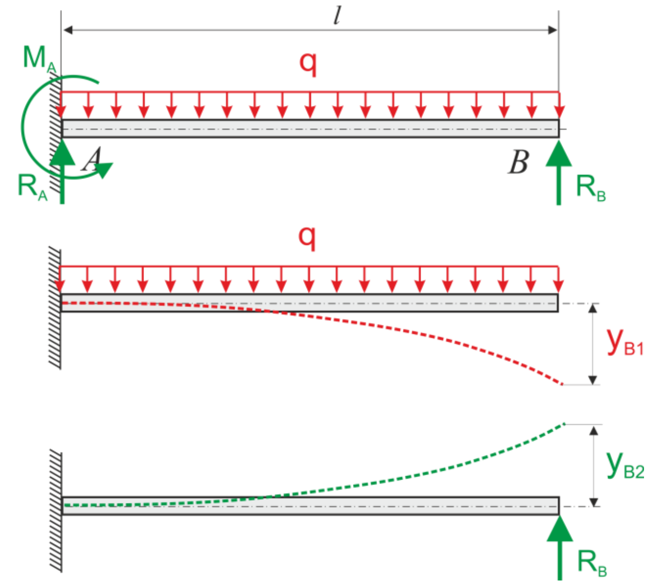
1. Równanie geometryczne **$y_B = 0$ (rys. a).**

Po uwolnieniu belki z podparcia B należy obliczyć jej ugięcie wywołane obciążeniem q oraz siłą R_B

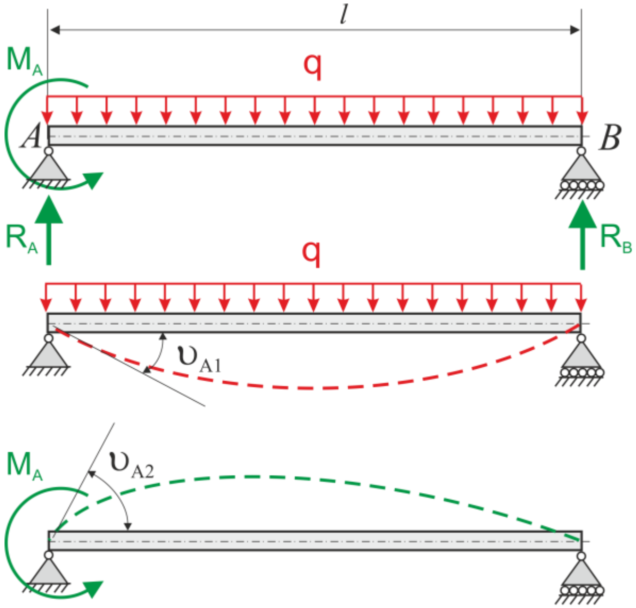
$$y_{B1} = \frac{qL^4}{8EJ},$$

$$y_{B2} = \frac{R_B L^3}{3EJ},$$

$$y_{B1} = y_{B2} \quad \rightarrow \quad \frac{qL^4}{8EJ} = \frac{R_B L^3}{3EJ} \quad \rightarrow \quad R_B = \frac{3}{8} qL$$



2. Równanie geometryczne $y_A = 0$ (rys. b).
Po uwolnieniu belki z utwierdzenia, należy porównać kąty obrotu na podporze A:



$$\Theta_{A1} = \frac{qL^3}{24EJ},$$

$$\Theta_{A2} = \frac{M_A L}{3EJ},$$

$$\Theta_{A1} = \Theta_{A2} \rightarrow \frac{qL^3}{24EJ} = \frac{M_A L}{3EJ} \rightarrow M_A = \frac{qL^2}{8}.$$

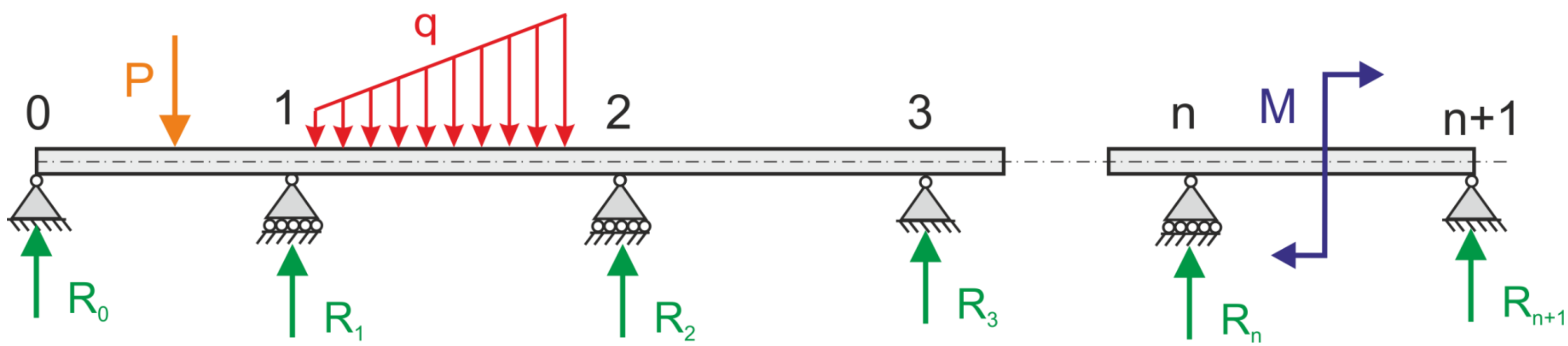
Z układu dwóch równań statyki oraz jednego z przedstawionych wyżej równań geometrycznych otrzymuje się:

$$\boxed{R_A = \frac{5}{8}qL, \qquad R_B = \frac{3}{8}qL, \qquad M_A = \frac{1}{8}qL^2.}$$

3.5. Równanie 3 Momentów

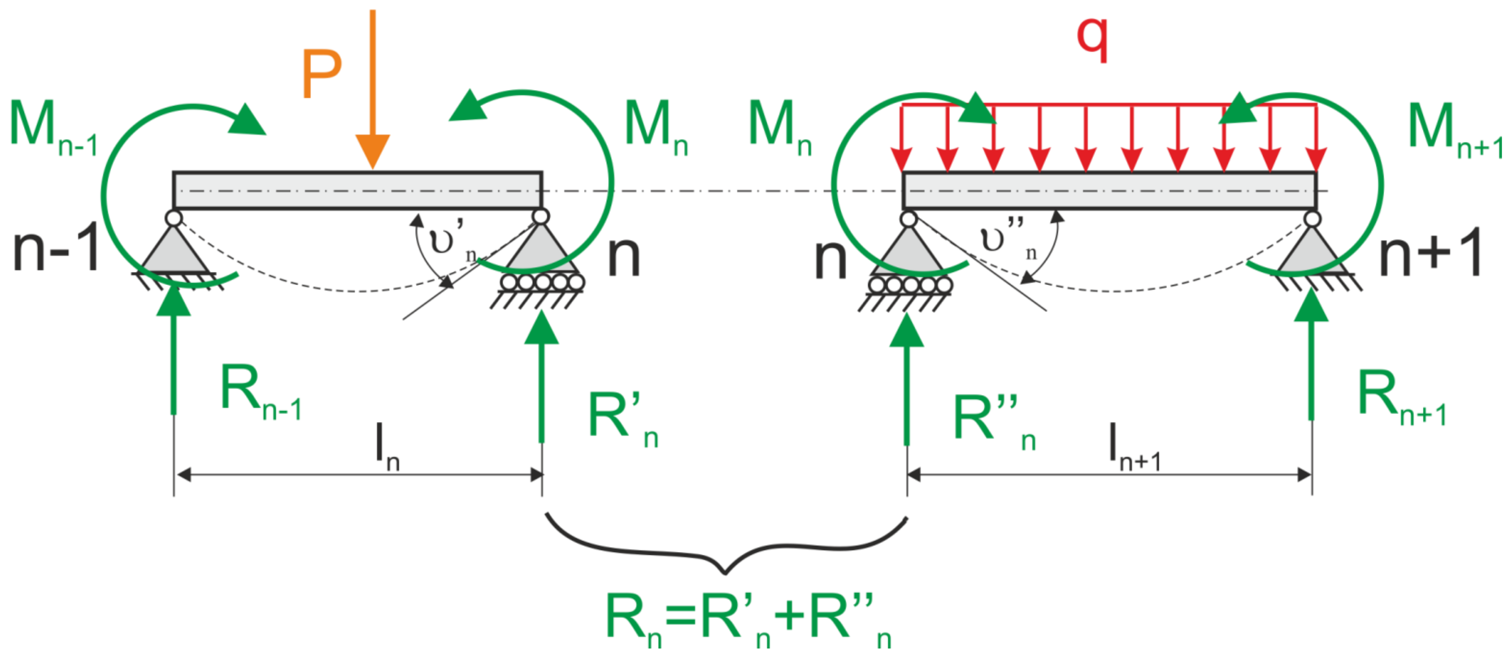
Równanie 3 momentów ma zastosowanie do rozwiązywania belek statycznie niewyznaczalnych wielopodporowych lub wieloprzęsłowych.

Przęsło to część belki pomiędzy dwoma sąsiadującymi podporami.



W celu wyprowadzenia równania 3 momentów wydzielamy dwa dowolne lecz sąsiadujące ze sobą przęsła

W celu wyprowadzenia równania 3 momentów wydzielamy dwa sąsiadujące ze sobą przęsła:

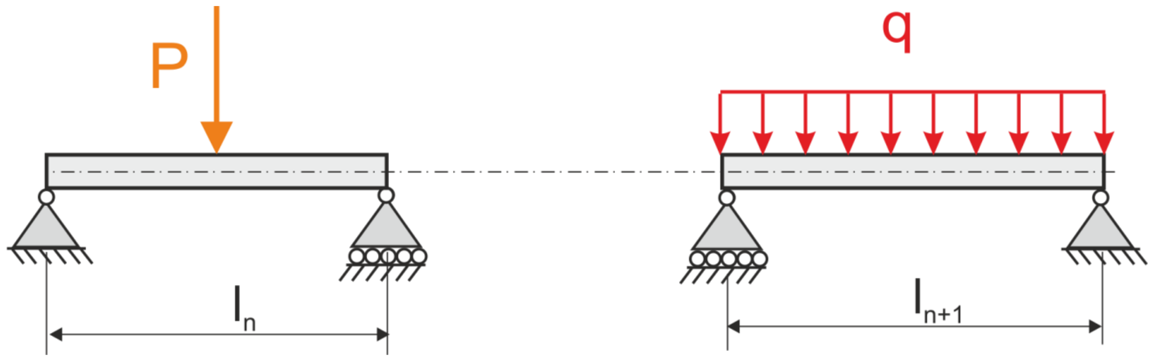


Momenty skrajne równe zero

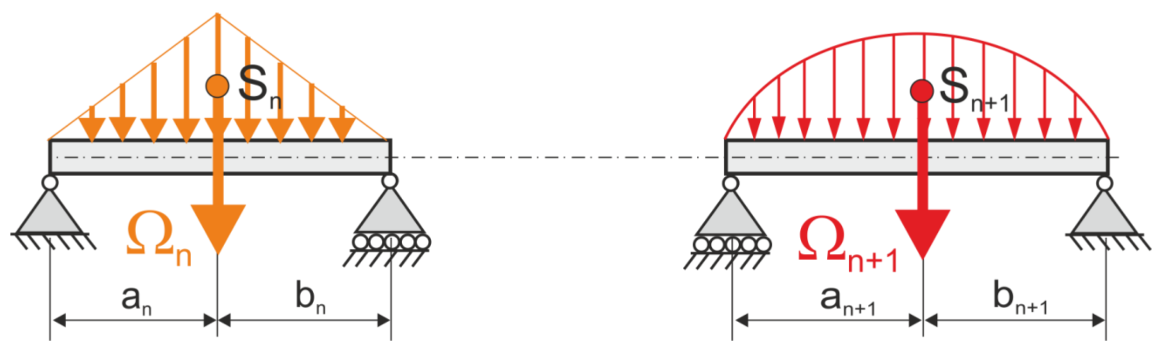
Różne siły z powodu braku symetrii

$\oplus$ M=> $\bar{q}\downarrow$

$\ominus$ M=> $\bar{q}\uparrow$



Pola wykresów momentów gnących od obciążeń zewnętrznych

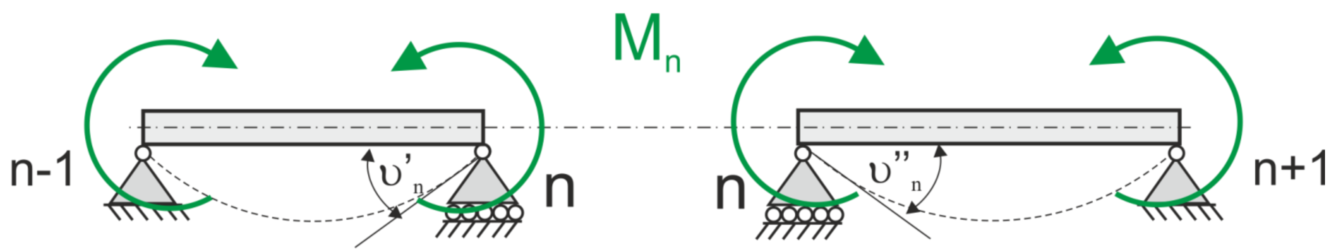


S_n, S_{n+1} – środki ciężkości pól

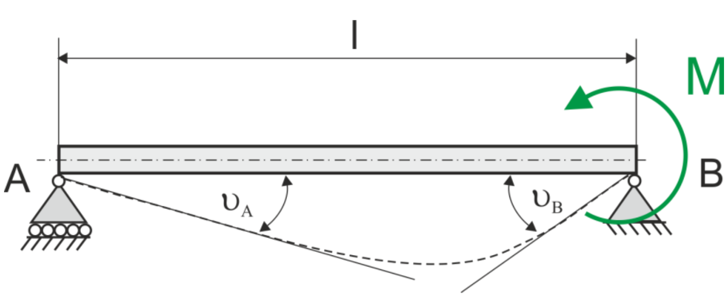
Równanie 3 momentów wyprowadzamy na podstawie porównania kątów ugięcia w belkach nad środkową podporą.

Kąty te wyznaczamy metodą analityczno-wykreślną

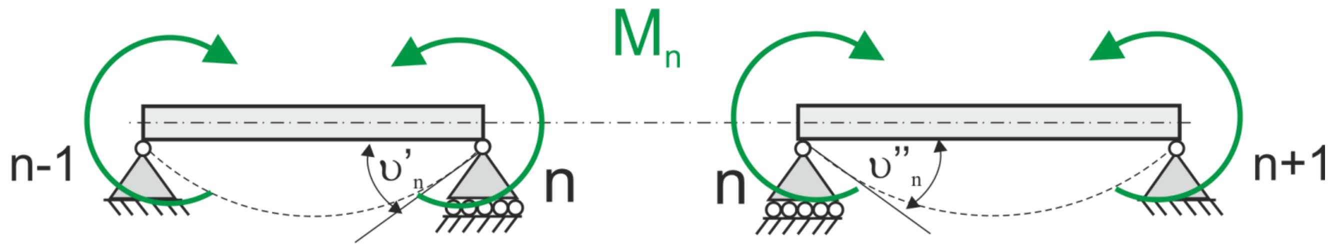
$$v'_n = -v''_n$$



Kąt obrotu mniejszy o połowę

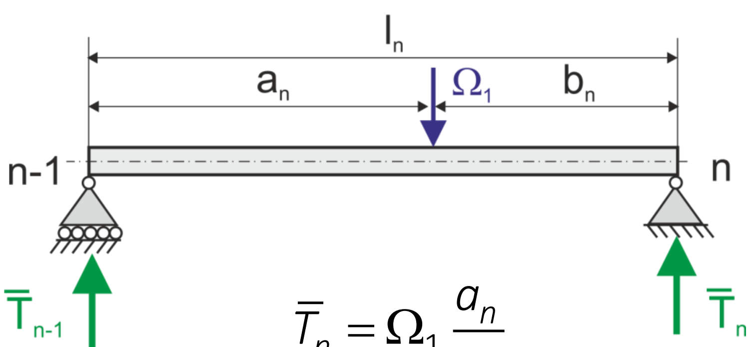


$$v_A = \frac{Ml}{6EJ} \qquad v_B = \frac{Ml}{3EJ}$$



$$v'_n = \pm v'_n\left(M_{n-1}\right) \pm v'_n\left(M_n\right) \pm v'_n\left(\Omega_n\right) \qquad v''_n = \pm v'_n\left(M_n\right) \pm v''_n\left(M_{n+1}\right) \pm v''_n\left(\Omega_{n+1}\right)$$

Kąty odmierzane od osi belki od obciążeń zewnętrznych:



$$\bar{T}_n = \Omega_1 \frac{a_n}{l_n}$$

$$v'_n = \frac{M_{n-1} l_n}{6EJ} + \frac{M_n l_n}{3EJ} + \frac{\Omega_n a_n}{EJ l_n}$$

$$v''_n = \frac{M_n l_{n+1}}{3EJ} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EJ} + \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{EJ l_{n+1}}$$

Z równania momentów względem podpory n-1

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Porównując obydwa kąty ze sobą: $v'_n = -v''_n$

$$v'_n = \frac{M_{n-1} l_n}{6EJ} + \frac{M_n l_n}{3EJ} + \frac{\Omega_n a_n}{EJ l_n} \qquad v''_n = \frac{M_n l_{n+1}}{3EJ} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EJ} + \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{EJ l_{n+1}}$$

Otrzymujemy:

$$\frac{M_{n-1} l_n}{6EJ} + \frac{M_n l_n}{3EJ} + \frac{\Omega_n a_n}{EJ l_n} = -\frac{M_n l_{n+1}}{3EJ} - \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EJ} - \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{EJ l_{n+1}}$$

Mnożymy obustronnie przez 6*EJ* i otrzymujemy RÓWNANIE 3 MOMENTÓW

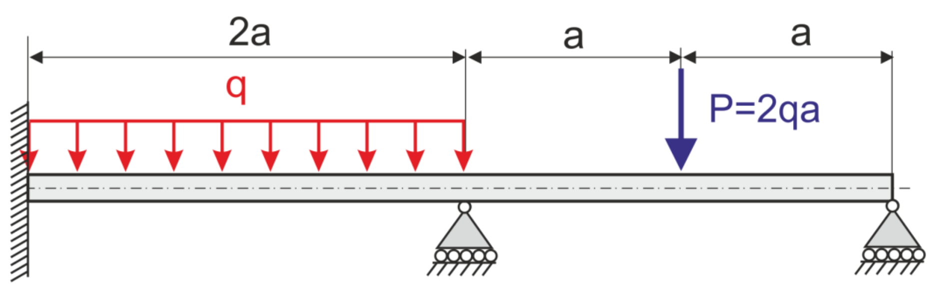
$$\boxed{M_{n-1} l_n + 2M_n \left(l_n + l_{n+1} \right) + M_{n+1} l_{n+1} = -6\frac{\Omega_n a_n}{l_n} - 6\frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}}$$

Ω_n, Ω_{n+1} - pola wykresów momentów gnących od obciążeń zewnętrznych

a_n, b_{n+1} - odległości środków ciężkości wykresów M od skrajnych podpór

Przykład 1

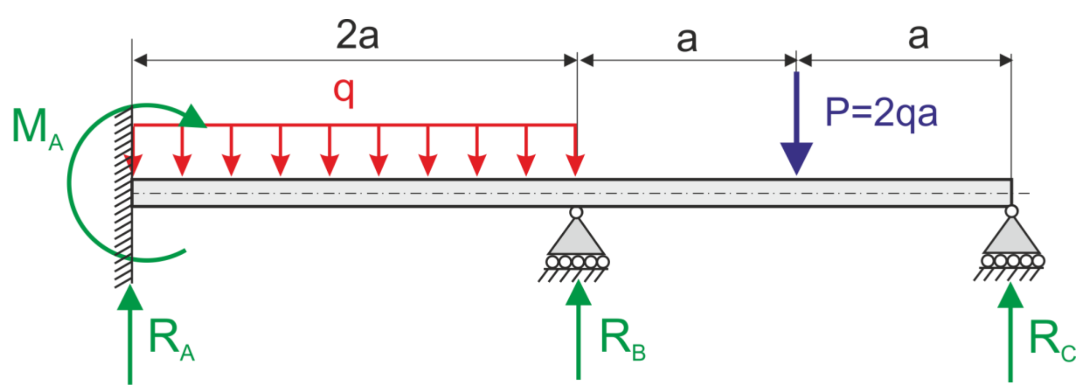
Dla belki pokazanej na rysunku wyznaczyć reakcje, korzystając z metody 3 momentów



Uwalniamy układ od więzów:

$$(1) \quad \sum F_y = 0$$

$$(2) \quad \sum M_A = 0$$



Uwalniamy układ od więzów:

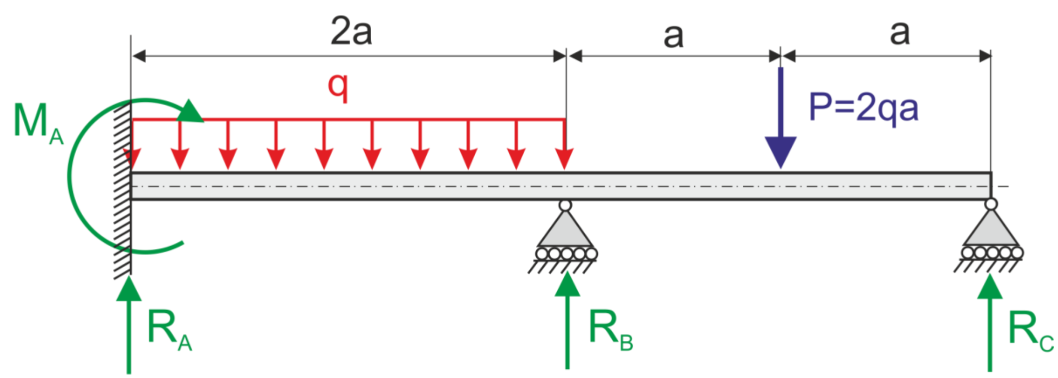
(1) $\sum F_y = 0$

(2) $\sum M_A = 0$

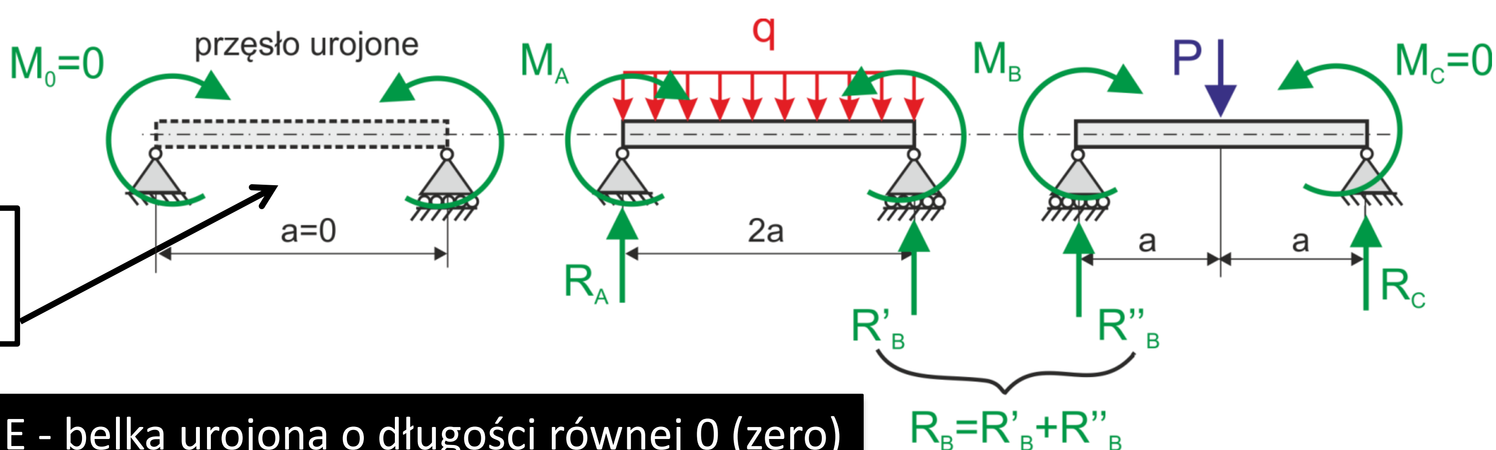
$\boxed{4N-2RS=U2NW}$

(3) R3M

(4) R3M

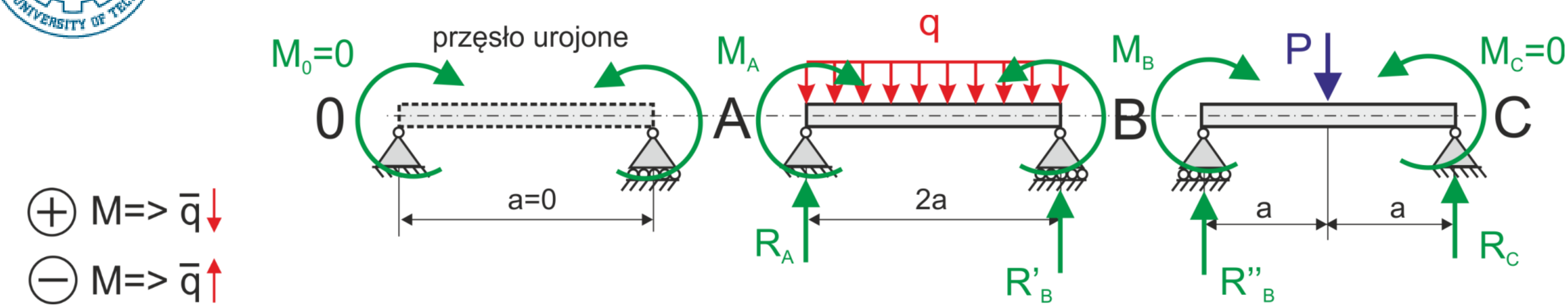


Zamieniamy belkę rzeczywistą na belkę fikcyjną – R3M

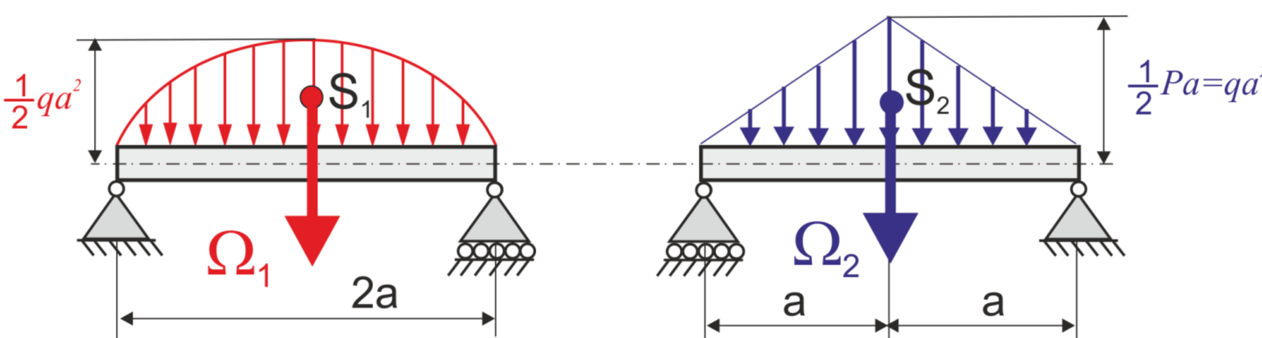


Nieskończona SZTYWNOŚĆ

UTWIERDZENIE - belka urojona o długości równej 0 (zero)



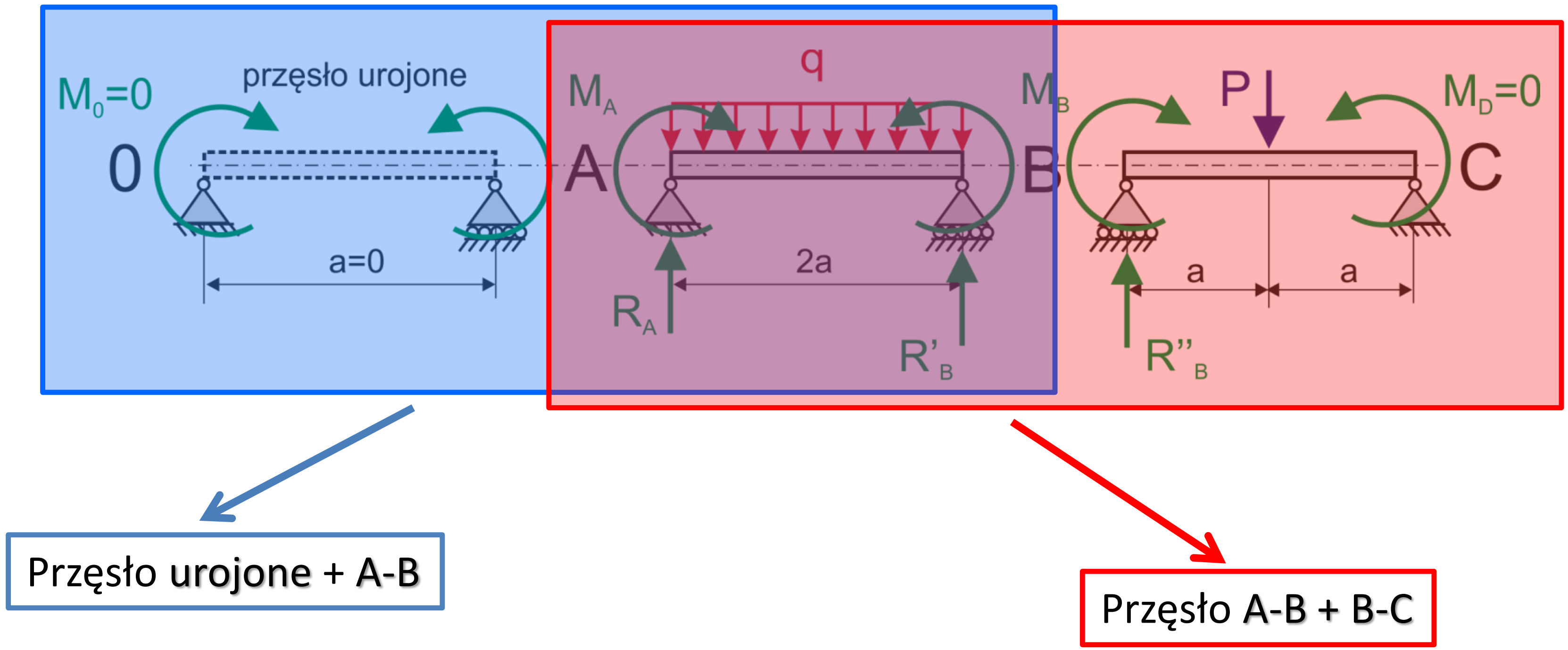
Rysujemy wykresy momentów gnących dla poszczególnych (wydzielonych) przęseł



$$\Omega_1 = \frac{2}{3}\cdot 2a\cdot\frac{qa^2}{2}$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot qa^2$$

Dwóch brakujących równań poszukujemy dla kolejnych dwóch przęseł:



Przęsło urojone + A-B

$$\underbrace{\boxed{\cancel{M_{n-1}l_n}}}_{0}+2M_A\left(0+2a\right)+M_B2a=\underbrace{\boxed{\cancel{-6\frac{\Omega_n a_n}{l_n}}}}_{0}-6\frac{\Omega_1 a}{2a}$$

$$\left(3\right)\quad 2M_A2a+M_B2a=-2qa^3\rightarrow 2M_A+M_B=-qa^2$$

Przęsło A-B + B-C

$$M_A2a+2M_B\left(2a+2a\right)+\underbrace{\boxed{\cancel{M_{n+1}l_{n+1}}}}_{0}=-6\frac{\Omega_1 a}{2a}-6\frac{\Omega_2 a}{2a}$$

$$\left(4\right)\quad M_A2a+2M_B4a=-5qa^3\rightarrow 2M_A+8M_B=-5qa^2$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

$$(3)\quad 2M_A + M_B = -qa^2$$

$$(4)\quad 2M_A + 8M_B = -5qa^2$$

Po wyliczeniu:

$$(3)\quad M_A = -\frac{3}{14}qa$$

$$(4)\quad M_B = -\frac{4}{7}qa$$

W celu wyznaczenia reakcji podporowych R_A, R_B i R_D wypisujemy równania statyki dla każdego przęsła oddzielnie:

Przęsło A-B

$$(1)\quad \sum F_y = 0 \rightarrow R_A + R'_B - q2a = 0$$

$$(2)\quad \sum M_B = 0 \rightarrow R_A 2a + M_A - M_B - q2a \cdot a = 0$$

Stąd wyliczamy R_A, R'_B

Przęsło B-C

$$(1)\quad \sum F_y = 0 \rightarrow R''_B + R_D - P = 0$$

$$(2)\quad \sum M_C = 0 \rightarrow R''_B 2a + M_B - P \cdot a = 0$$

Stąd wyliczamy R_C, R''_B

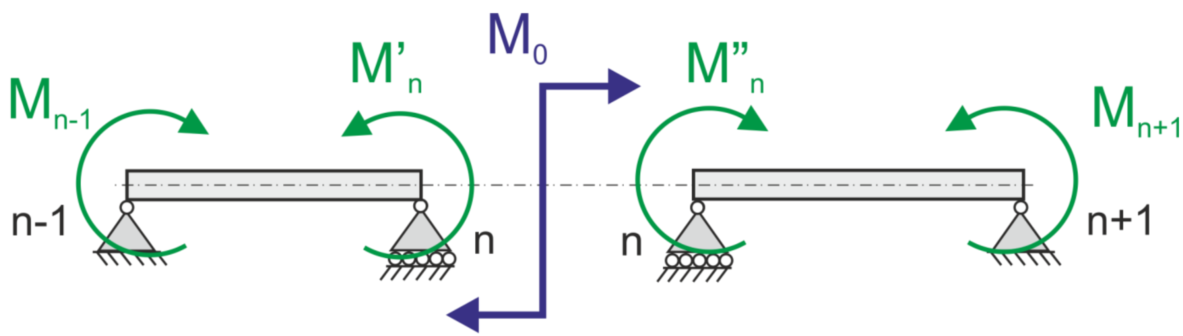
3.6. Równanie 4 Momentów

RÓWNANIE 3 MOMENTÓW

$$M_{n-1}l_n + 2M_n\left(l_n + l_{n+1}\right) + M_{n+1}l_{n+1} = -6\frac{\Omega_n a_n}{l_n} - 6\frac{\Omega_{n+1}b_{n+1}}{l_{n+1}}$$

W przypadku kiedy obciążeniem zewnętrznym jest moment gnący M_0 przyłożony do belki nad podporą, to stosujemy równanie 4 momentów:

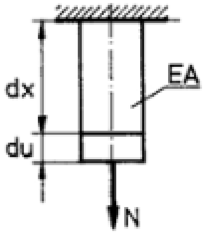
$$\boxed{-M'_n + M_0 + M''_n = 0}$$



RÓWNANIE 4 MOMENTÓW

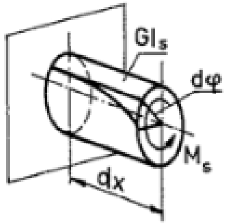
$$M_{n-1}l_n + 2M'_n l_n + 2M''_n l_{n+1} + M_{n+1}l_{n+1} = -6\frac{\Omega_n a_n}{l_n} - 6\frac{\Omega_{n+1}b_{n+1}}{l_{n+1}}$$

3.6. Metody energetyczne (studia II stopnia)



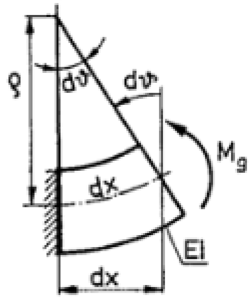
Rozciąganie lub ściskanie pręta

$$dV=\frac{1}{2}Ndu=\frac{N^2dx}{2EA}$$



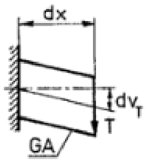
Skręcanie pręta

$$dV=\frac{1}{2}M_sd\varphi=\frac{M_S^2dx}{2GI_S}$$



Zginanie proste belki

$$dV=\frac{1}{2}M_gd\vartheta=\frac{M_g^2dx}{2EI}$$



Ścinanie pręta (model uproszczony)

$$dV=\frac{1}{2}Tdv_T=\frac{\beta T^2dx}{2GA}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}\frac{(Sila\ wewnętrzna)^2}{(Sztywnosc)}$$

Rozciąganie: $\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}\frac{N^2}{EA}$

Skręcanie: $\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}\frac{M_s^2}{GI_s}$

Ścinanie: $\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\beta T^2}{GA}$

Zginanie: $\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}\frac{M_g^2}{EI}$

$$V = \int_0^l \frac{(Sila\ wewnętrzna)^2\, dx}{2(Sztywnosc)}$$

Rozciąganie: $V = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA}$

Ścinanie: $V = \int_0^l \frac{\beta T^2 dx}{2GA}$

Skręcanie: $V = \int_0^l \frac{M_s^2 dx}{2GI_s}$

Zginanie: $V = \int_0^l \frac{M_g^2 dx}{2EI}$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Jeśli siła wewnętrzna oraz sztywność nie zależą od x

$$V = \frac{(Sila\ wewnetrzna)^2\ dlugosc}{2(Sztywnosc)}$$

Jeśli N oraz EA nie zależą od x

Rozciąganie: $$V = \frac{N^2 l}{2EA}$$

Jeśli T oraz GA nie zależą od x

Ścinanie: $$V = \frac{\beta T^2 l}{2GA}$$

Jeśli M_s oraz GI_s nie zależą od x

Skręcanie: $$V = \frac{M_s^2 l}{2GI_s}$$

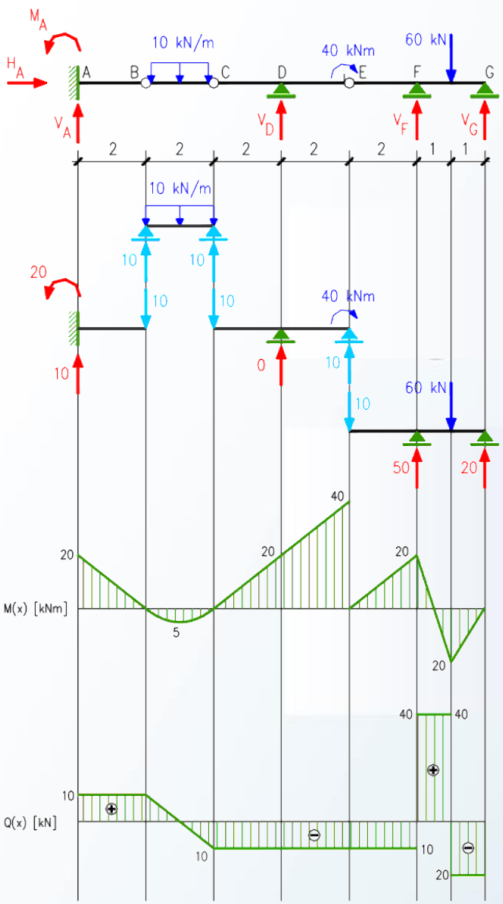
Jeśli M_g oraz EI nie zależą od x

Zginanie: $$V = \frac{M_g^2 l}{2EI}$$

Energia sprężysta w pręcie prostym w przypadku ogólnym

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_s^2}{GI_s} + \frac{M_{gy}^2}{EI_y} + \frac{M_{gz}^2}{EI_z} + \frac{\beta_y T_y^2}{GA} + \frac{\beta_z T_z^2}{GA} \right) dx$$

POLITECHNIKA POZNAŃSKA



DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

Zapraszam ponownie ☺